MACROECONOMÍA 3

PARTE V: MACROECONOMÍA DE UNA ECONOMÍA ABIERTA: EL CASO EL PERÚ

Introducción

Este es un modelo teórico que reproduce el sistema de políticas macroeconómicas vigentes en el Perú. Se modela el caso de una economía pequeña y abierta, donde la política monetaria opera con un régimen de tipo de cambio flotante y un sistema de metas explícitas de inflación, con la tasa de referencia para los mercados interbancarios como instrumento de política y la cantidad de dinero endógena; mientras que la política fiscal funciona imponiendo un límite al déficit fiscal como porcentaje del PBI.

El modelo permite simular analíticamente los efectos de la política macroeconómica, de los cambios en el contexto internacional, así como de choques de oferta, sobre la producción, los precios, el tipo de cambio y la tasa de interés, en el corto plazo, en el tránsito al equilibrio estacionario y en el equilibrio estacionario.

1. El subsistema del corto plazo

1.1 La demanda agregada

El mercado de bienes

El mercado de bienes es keynesiano. La producción depende del consumo, la inversión, el gasto público y las exportaciones netas. El gasto público, dado que existe un límite de déficit fiscal como porcentaje del PBI, es endógeno.

$$Y = D = C + I + G + XN \tag{1}$$

$$C = C_0 + c(1-t)Y \qquad (2)$$

$$I = I_0 - bi \qquad (3)$$

$$DF = G + iB^g + (E-P)i^* B^{*g} - tY = \alpha Y$$

En consecuencia, el gasto público no financiero (G) es endógeno:

$$G = (t+\alpha)Y - iB^g - (E-P)i^* B^{*g}. \qquad (4)$$

$$XN = a_o Y^* + a_1(E + P^* - P) - m(1-t)Y \qquad (5)$$

Reemplazando los valores del consumo, la inversión privada, el gasto público y las exportaciones netas en la ecuación (1), el equilibrio en el mercado de bienes viene dado por:

$$Y = A_0 + c(1-t)Y - (b + B^g)i + (t+\alpha)Y + a_o Y^* + (E-P)(a_1 - i^* B^{*g}) + a_1 P^* - m(1-t)Y$$

O,

$$Y = k\left[A_0 - (b + B^g)i + a_0 Y^* + (E-P)(a_1 - i^* B^{*g}) + a_1 P^*\right] \qquad (6)$$

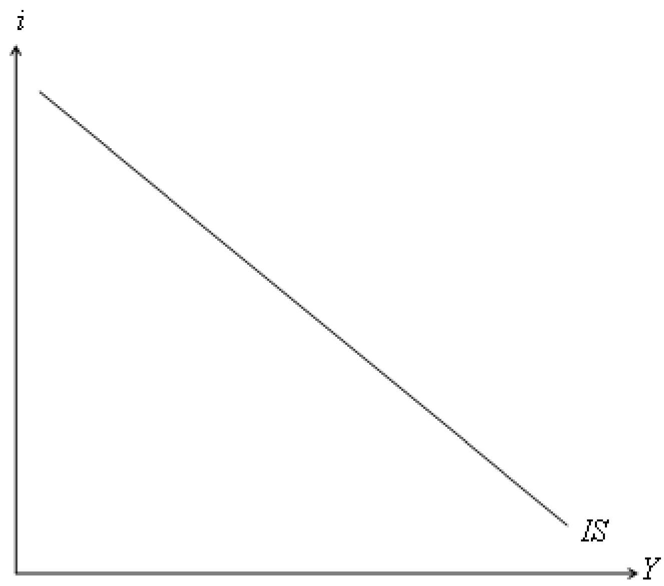
Donde $k = \dfrac{1}{(1-t)(s+m)-\alpha}$, $A_0 = C_0 + I_0$.

O,

$$i = \frac{\left[A_0 + a_o Y^* + (E-P)(a_1 - i^* B^{*g}) + a_1 P^*\right]}{(b + B^g)} - \frac{Y}{k(b + B^g)} \qquad (7)$$

$$\left.\frac{di}{dY}\right|_{IS} = -\frac{1}{k(b + B^g)} < 0.$$

Figura 1



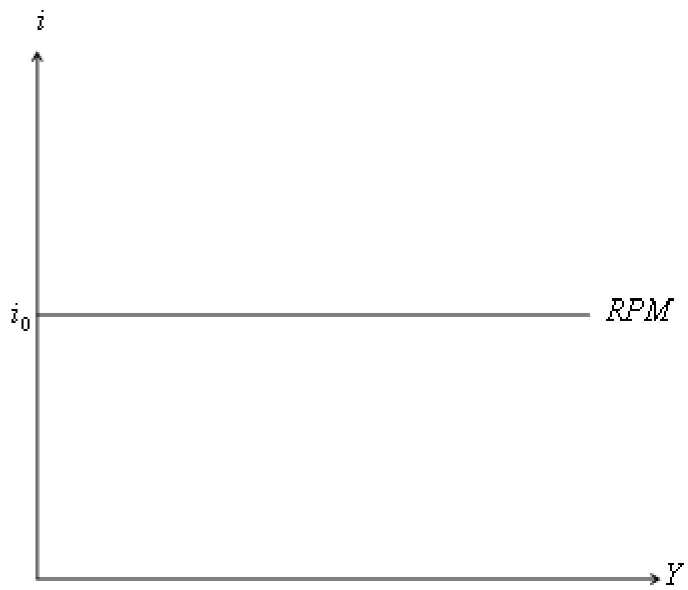
El mercado de dinero y la regla de política monetaria

La RPM :

$$i = i^{*} + i_{1}(P - P^{m}) \tag{8}$$

$$\left.\frac{di}{dY}\right|_{RPM} = 0.$$

Figura 2



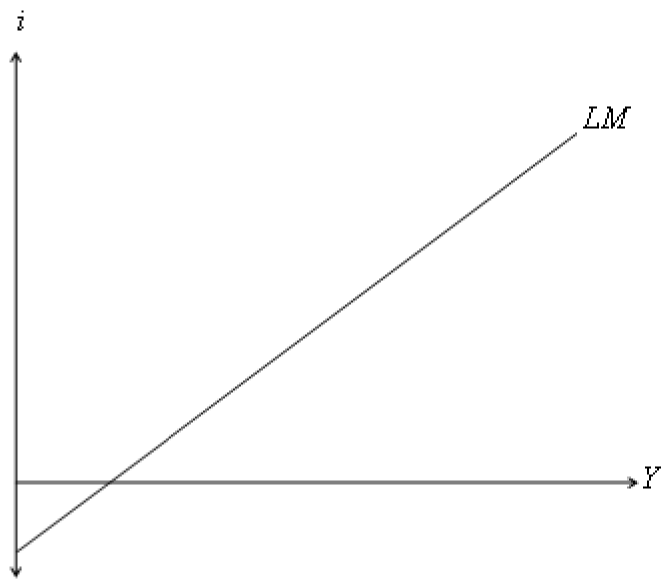
$$m^s = M^s - P = B^{*bcr} + B^b - P = m^d = b_o Y - b_1 i.$$

$$B^b = -B^{*bcr} + P + b_o Y - b_1 i. \tag{9}$$

$$i = -\frac{B^b + B^{*bcr} - P}{b_1} + \frac{b_o}{b_1} Y. \tag{10}$$

$$\left.\frac{di}{dY}\right|_{LM} = \frac{b_0}{b_1} > 0.$$

Figura 3

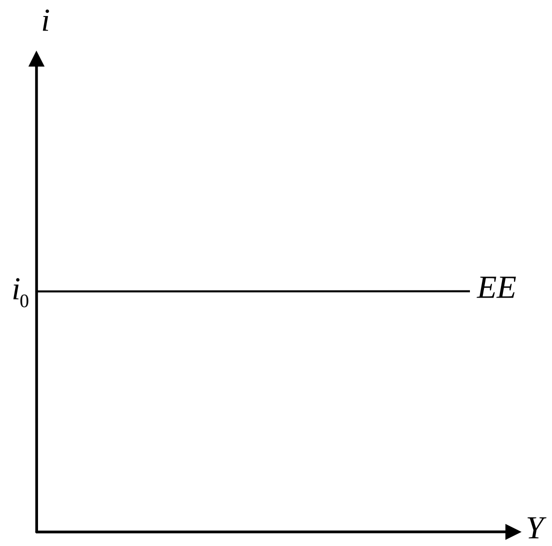


El equilibrio externo o arbitraje no cubierto de tasas de interés

$$i = i^* + (\frac{1}{h})(E^e - E) \tag{11}$$

$$\left.\frac{di}{dY}\right|_{EE} = 0.$$

Figura 4



O,

$$E = E^e + h(i^* - i) \qquad (12)$$

Reemplazando la ecuación (8) en (12) y, luego, reemplazando la expresión obtenida, junto con la ecuación (8), en la ecuación del equilibrio en el mercado de bienes, ecuación (6), se obtiene la demanda agregada.

$$Y = k\left\{A_0 + a_0 Y^* + a_1 P^* - (b + B^g)i^* + \left[b + B^g + (a_1 - i^* B^{*g})h\right]i_1 P^m + (a_1 - i^* B^{*g})E^e - \left[(a_1 - i^* B^{*g})(1 + h i_1) + (b + B^g)i_1\right]P\right\}$$

Asumiremos que $a_1 - i^* B^{*g} = a_e > 0$.

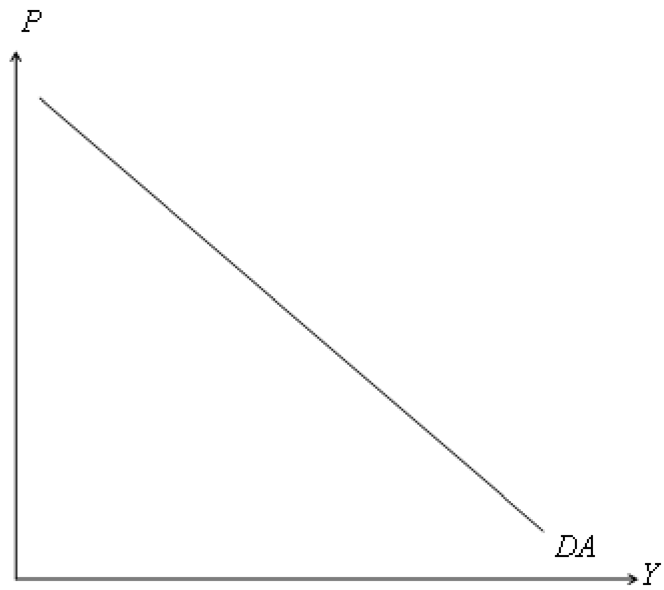
$$Y = k\left\{A_0 + a_0 Y^* + a_1 P^* - (b + B^g)i^* + \left[b + B^g + a_e h\right]i_1 P^m + a_e E^e - \left[a_e + (a_e h + b + B^g)i_1\right]P\right\} \qquad (13)$$

O,

$$P = \mathrm{M}\left[A_0 + a_0 Y^* + a_1 P^* + (a_e h + b + B^g)i_1 P^m - (b + B^g)i^* + a_e E^e\right] - \frac{\mathrm{M}Y}{k}. \quad (14)$$

Donde $\mathrm{M} = \dfrac{1}{a_e + (a_e h + b + B^g)i_1}$.

Figura 5



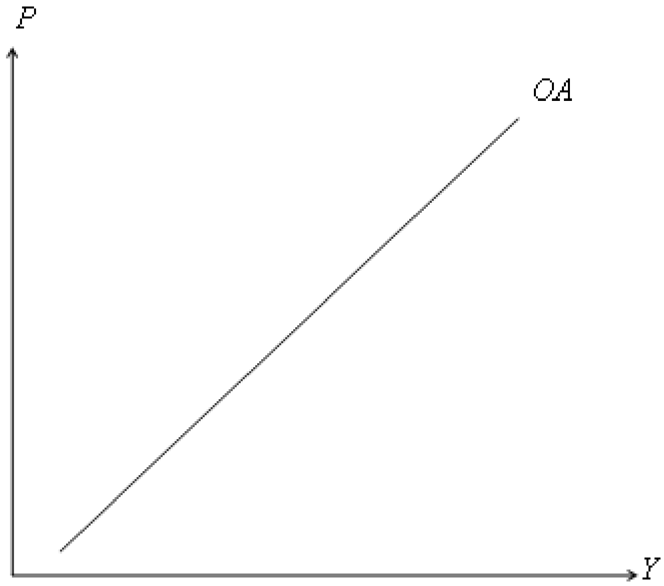
$$\left.\frac{dP}{dY}\right|_{DA} = -\frac{1}{k\left[a_e + (a_e h + b + B^g) i_1\right]} = -\frac{\text{M}}{k} < 0.$$

1.2 La oferta agregada

$$P = P^e + \lambda(Y - \overline{Y}) \tag{15}$$

$$\left.\frac{dP}{dY}\right|_{OA} = \lambda > 0.$$

Figura 6

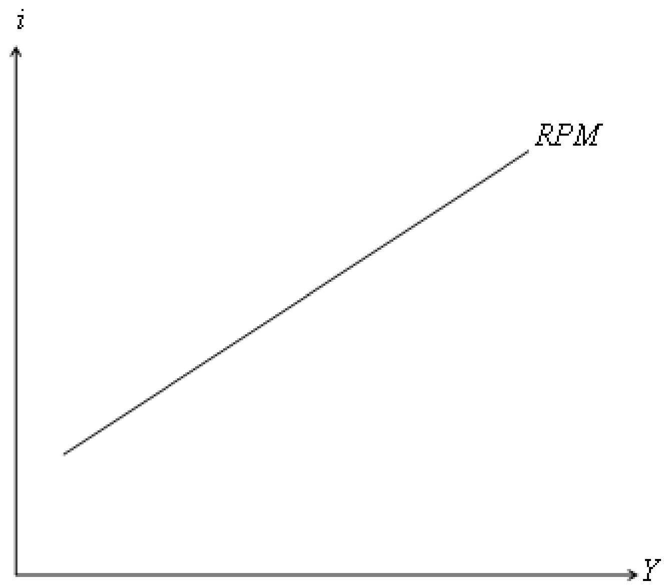


1.3 La demanda y la oferta agregada

Necesitamos que la regla de política monetaria no contenga el nivel de precios P. Para ese propósito, introducimos (15) en (8), y obtenemos:

$$i = i^* + i_1(P^e - \lambda \overline{Y} - P^m) + i_1 \lambda Y. \tag{16}$$

Figura 7



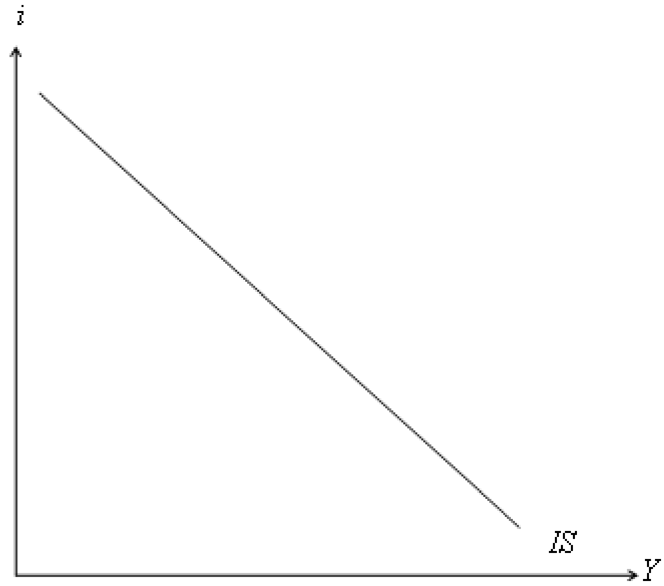
$$\left.\frac{di}{dY}\right|_{RPM} = i_1\lambda > 0.$$

Por otro lado, la curva IS (ecuación 7), tiene como parámetros dos variables endógenas, el tipo de cambio y los precios. Para eliminar al nivel de precios de la IS, reemplazamos (15) en (7). De este procedimiento resulta una nueva IS,

$$i = \frac{A_0 + a_0Y^* + a_1P^* + a_e(E - P^e + \lambda\overline{Y})}{b + B^g} - \frac{1 + \lambda ka_e}{k(b + B^g)}Y. \tag{17}$$

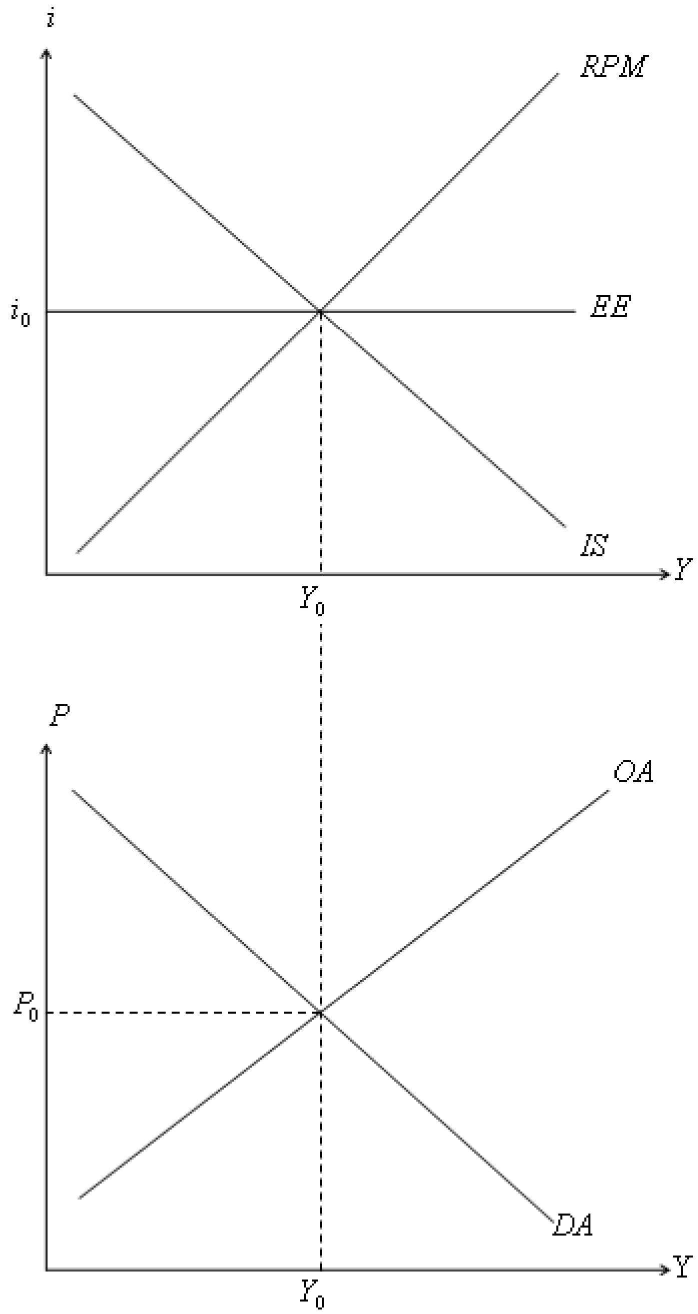
$$\left.\frac{di}{dY}\right|_{IS} = -\frac{1 + \lambda ka_e}{k(b + B^g)} < 0.$$

Figura 8



En la Figura 9 se representa el modelo completo.

Figura 9



Como el modelo es lineal, los valores de equilibrio de corto plazo de la producción y el nivel de precios pueden hallarse fácilmente a partir de las ecuaciones (14) y (15).

$$Y^{eq} = \left[\frac{k\mathrm{M}}{M + k\lambda}\right]\left[A_0 + a_0Y^* + a_1P^* + (a_eh + b + B^g)i_1P^m - (b + B^g)i^* + a_eE^e + \frac{1}{\mathrm{M}}(\lambda\overline{Y} - P^e)\right] \tag{18}$$

$$P^{eq} = \left[\frac{\mathrm{M}}{M + k\lambda}\right]\left[P^{e} - \lambda\overline{Y} + \lambda k\left[\ A_0 + a_0 Y^{*} + a_1 P^{*} + (a_e h + b + B^{g})i_1 P^{m} - (b + B^{g})i^{*} + a_e E^{e}\ \right]\right]$$

(19)

Conocido el precio de equilibrio (ecuación 19), puede hallarse la tasa de interés de equilibrio en la ecuación (8).

$$i^{eq} = \left[\frac{\left[1 + \lambda k a_e (1 + h i_1)\right]\mathrm{M}}{\lambda k + \mathrm{M}}\right] i^{*} - \left[\frac{\lambda k a_e \mathrm{M} i_1}{\lambda k + \mathrm{M}}\right] P^{m} + \frac{\mathrm{M} i_1}{\mathrm{M} + \lambda k}\left[P^{e} - \lambda\overline{Y} + \lambda k(A_0 + a_0 Y^{*} + a_1 P^{*} + a_e E^{e})\right]$$

(20)

Conocida la tasa de interés de equilibrio puede, a su vez, determinarse el tipo de cambio de equilibrio de corto plazo en la ecuación (12).

$$E^{eq} = \frac{1 + \lambda k\left[a_e + (b + B^{g})i_1\right]}{1 + \lambda k\left[a_e + (a_e h + b + B^{g})i_1\right]} E^{e} + \frac{h\lambda k(b + B^{g})i_1}{1 + \lambda k\left[a_e + (a_e h + b + B^{g})i_1\right]} i^{*} + \frac{hMi_1}{M + \lambda k}\left[\lambda k a_e P^{m} - P^{e} + \lambda\overline{Y} - \lambda k(A_0 + a_0 Y^{*} + a_1 P^{*})\right]$$

(21)

El modelo completo en su forma reducida está compuesto por el sistema de ecuaciones (18)-(21). A partir de estas ecuaciones pueden determinarse los efectos de las variables exógenas sobre las variables endógenas.

$$Y^{eq} = \left[\frac{k\mathrm{M}}{M + k\lambda}\right]\left[A_0 + a_0 Y^{*} + a_1 P^{*} + (a_e h + b + B^{g})i_1 P^{m} - (b + B^{g})i^{*} + a_e E^{e} + \frac{1}{\mathrm{M}}(\lambda\overline{Y} - P^{e})\right]$$

(18)

$$P^{eq} = \left[\frac{\mathrm{M}}{M + k\lambda}\right]\left[P^{e} - \lambda\overline{Y} + \lambda k\left[\ A_0 + a_0 Y^{*} + a_1 P^{*} + (a_e h + b + B^{g})i_1 P^{m} - (b + B^{g})i^{*} + a_e E^{e}\ \right]\right]$$

(19)

$$i^{eq} = \left[\frac{\left[1 + \lambda k a_e (1 + h i_1)\right]\mathrm{M}}{\lambda k + \mathrm{M}}\right] i^{*} - \left[\frac{\lambda k a_e \mathrm{M} i_1}{\lambda k + \mathrm{M}}\right] P^{m} + \frac{\mathrm{M} i_1}{\mathrm{M} + \lambda k}\left[P^{e} - \lambda\overline{Y} + \lambda k(A_0 + a_0 Y^{*} + a_1 P^{*} + a_e E^{e})\right]$$

(20)

$$E^{eq} = \frac{1+\lambda k\left[a_e + (b+B^g)i_1\right]}{1+\lambda k\left[a_e + (a_e h + b + B^g)i_1\right]}E^e + \frac{h\lambda k(b+B^g)i_1}{1+\lambda k\left[a_e + (a_e h + b + B^g)i_1\right]}i^* + \frac{hMi_1}{M+\lambda k}\left[\lambda k a_e P^m - P^e + \lambda\bar{Y} - \lambda k(A_0 + a_0 Y^* + a_1 P^*)\right] \tag{21}$$

2. El subsistema del equilibrio estacionario

Cuando el tipo de cambio y los precios observados se igualan a sus valores esperados se dice que la economía alcanza un valor de equilibrio duradero o estacionario.

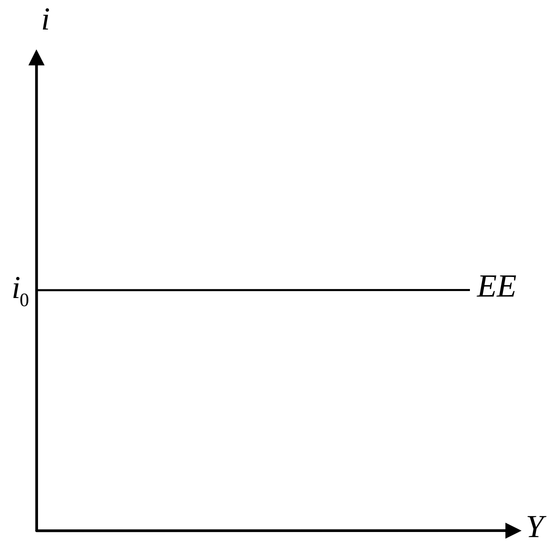
i) $E = E^e$

ii) $P = P^e$

Considerando la primera condición en la ecuación de arbitraje de tasas de interés, ecuación (12):

$$i = i^* \tag{22}$$

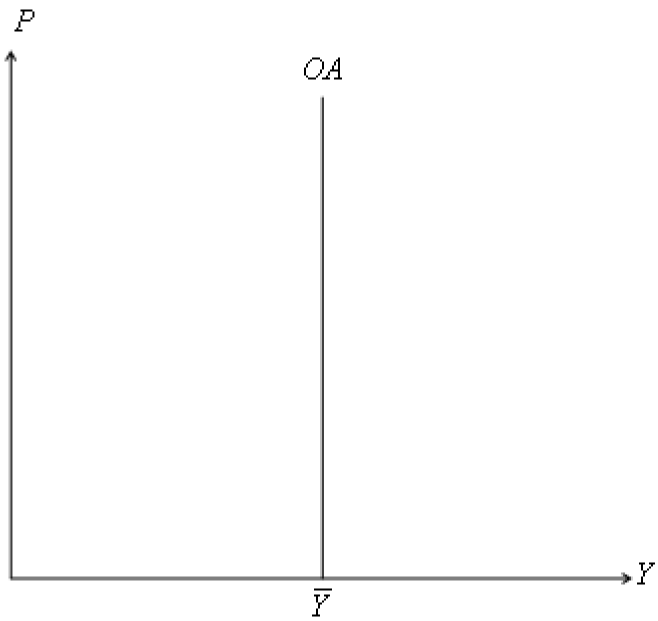
Figura 10



Reemplazando la segunda condición en la ecuación de oferta agregada de corto plazo, ecuación (15)

$$Y = \overline{Y} \tag{23}$$

Figura 11



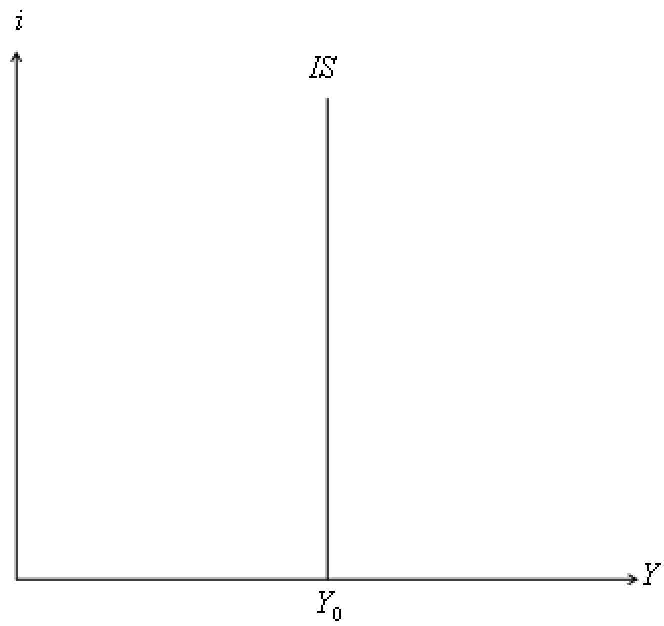
En la regla de política monetaria, ecuación (8), como la tasa de interés en el equilibrio estacionario es igual a la tasa de interés internacional, se deduce que el precio observado es igual a su nivel meta.

$$P = P^m \tag{24}$$

Por último, reemplazando las ecuaciones (22), (23) y (24) en la ecuación (6),

$$Y = k\left[A_0 + a_0 Y^* + a_1 P^* - (b + B^g) i^* + a_e (E - P^m)\right] \tag{25}$$

Figura 12

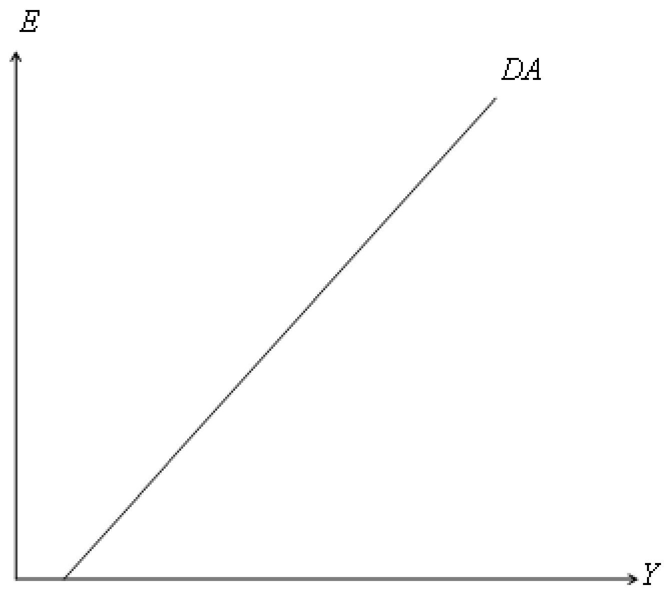


Es preferible expresar la demanda agregada en el plano (Y, E), como en la ecuación (26) y la Figura 13.

$$E = -\frac{1}{a_e}\left[A_0 + a_0 Y^* + a_1 P^* - (b + B^g) i^* - a_e P^m\right] + \frac{Y}{ka_e}. \tag{26}$$

L $\left.\frac{dE}{dY}\right|_{DA^{ee}} = \frac{1}{ka_e} > 0.$

Figura 13

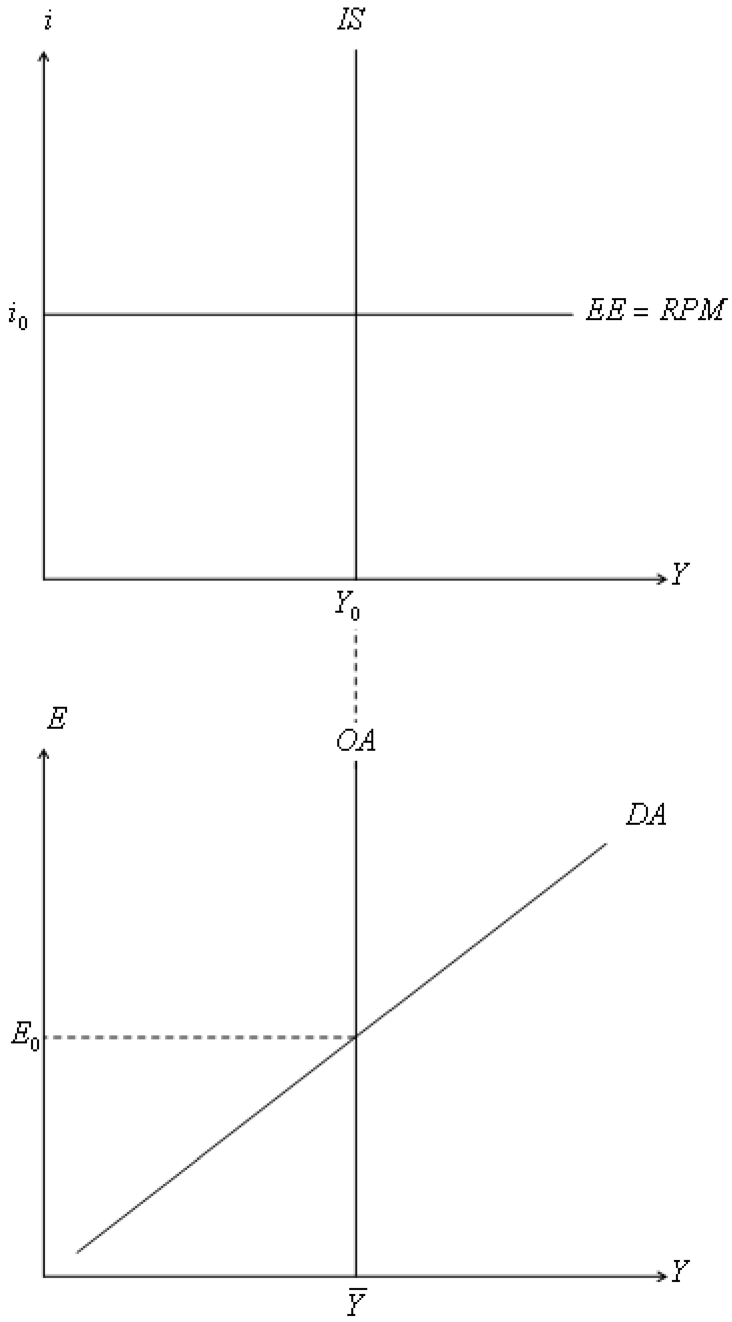


El sistema de demanda y oferta agregada del equilibrio estacionario está conformado por las ecuaciones (23) y (26). Su representación gráfica, que incluye el sistema IS, RPM y EA, se muestra en la Figura 14.

$$Y = \bar{Y} \tag{23}$$

$$E = -\frac{1}{a_e}\left[A_0 + a_0 Y^* + a_1 P^* - (b + B^g)i^* - a_e P^m\right] + \frac{Y}{ka_e}. \tag{26}$$

Figura 14



Resolviendo (23) y (26):

$$Y^{eqe} = \overline{Y} \tag{27}$$

$$E^{eqe} = -\frac{1}{a_e}\left[A_0 + a_0 Y^* + a_1 P^* - (b + B^g)i^* - a_e P^m\right] + \frac{\overline{Y}}{ka_e}. \tag{28}$$

$$e^{reqe} = E^{eqe} + P^{*} - P^{m} = \frac{\overline{Y}}{ka_e} - \frac{\left[A_0 - (b + B^{g})i^{*} + a_o Y^{*}\right]}{a_e} - \frac{i^{*} B^{*g}}{a_e} P^{*}. \qquad (29)$$

En el equilibrio estacionario, la producción se determina en la oferta, la tasa de interés es igual a la tasa de interés internacional, el nivel de precios se iguala con el precio meta del banco central y el tipo de cambio se determina en el mercado de bienes.

$$i^{eqe} = i^{*} \qquad (22)$$

$$P^{eqe} = P^{m} \qquad (24)$$

$$Y^{eqe} = \overline{Y} \qquad (27)$$

$$E^{eqe} = -\frac{1}{a_e}\left[A_0 + a_0 Y^{*} + a_1 P^{*} - (b + B^{g})i^{*} - a_e P^{m}\right] + \frac{\overline{Y}}{ka_e}. \qquad (28)$$

3. El tránsito al equilibrio estacionario

Hay varias maneras de modelar este tránsito hacia el equilibrio estacionario. Una manera es:

$$E^{e} = E_{t-1}. \qquad (30)$$

$$P^{e} = P_{t-1}. \qquad (31)$$

Incorporando este supuesto en (18)-(21), tenemos ahora que:

$$Y^{eq} = \left[\frac{k\mathrm{M}}{M + k\lambda}\right]\left[A_0 + a_0 Y^{*} + a_1 P^{*} + (a_e h + b + B^{g})i_1 P^{m} - (b + B^{g})i^{*} + a_e E_{t-1} + \frac{1}{\mathrm{M}}(\lambda \overline{Y} - P_{t-1})\right] \qquad (32)$$

$$P^{eq} = \left[\frac{\mathrm{M}}{M + k\lambda}\right]\left[P_{t-1} - \lambda \overline{Y} + \lambda k\left[\ A_0 + a_0 Y^{*} + a_1 P^{*} + (a_e h + b + B^{g})i_1 P^{m} - (b + B^{g})i^{*} + a_e E_{t-1}\ \right]\right] \qquad (33)$$

$$i^{eq}=\left[\frac{\left[1+\lambda ka_e(1+hi_1)\right]\mathrm{M}}{\lambda k+\mathrm{M}}\right]i^{*}-\left[\frac{\lambda ka_e\mathrm{M}i_1}{\lambda k+\mathrm{M}}\right]P^{m}+\frac{\mathrm{M}i_1}{\mathrm{M}+\lambda k}\left[P_{t-1}-\lambda\overline{Y}+\lambda k(A_0+a_0Y^{*}+a_1P^{*}+a_eE_{t-1})\right]$$

(34)

$$E^{eq}=\frac{1+\lambda k\left[a_e+(b+B^g)i_1\right]}{1+\lambda k\left[a_e+(a_eh+b+B^g)i_1\right]}E_{t-1}+\frac{h\lambda k(b+B^g)i_1}{1+\lambda k\left[a_e+(a_eh+b+B^g)i_1\right]}i^{*}+\frac{hMi_1}{M+\lambda k}\left[\lambda ka_eP^{m}-P_{t-1}+\lambda\overline{Y}-\lambda k(A_0+a_0Y^{*}+a_1P^{*})\right]$$

(35)

Dado que el sistema (32)-(35) constituye una forma reducida, para discutir las condiciones de estabilidad es suficiente trabajar con las ecuaciones que vinculan los precios y el tipo de cambio con sus valores rezagados; es decir, con las ecuaciones (33) y (35). Para ese objetivo, juntamos (33) y (35) en una matriz, prescindimos de las variables exógenas y nos concentramos en las endógenas y su rezago.

$$\begin{bmatrix}P\\E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}+\lambda k} & \dfrac{M\lambda ka_e}{\mathrm{M}+\lambda k}\\ -\dfrac{h\mathrm{M}i_1}{\mathrm{M}+\lambda k} & \dfrac{\mathrm{M}\left[1+\lambda k(a_e+bi_1+B^{g}i_1)\right]}{\mathrm{M}+\lambda k1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{t-1}\\E_{t-1}\end{bmatrix}+\ldots \qquad (36)$$

En su versión abreviada:

$$\mathrm{Y}=\mathrm{A}\mathrm{Y}_{t-1}. \qquad (37)$$

De (41) se deriva que para que cada una de las raíces caracteríticas sea menor que la unidad, en términos aboslutos $(|\lambda_i|<1)$, es decir, para que este sistema converga hacia el equilibrio estacionario, debe cumplirse (las expresiones en barras denotan valores absolutos):

i) $|Det\mathrm{A}|<1.$ (42)

ii) $|Tr\mathrm{A}|<1+Det\mathrm{A}.$ (43)

En nuestro modelo, se cumplen las dos condiciones:

i) $$DetA = \frac{M}{\lambda k + M} < 1.$$

ii) $$TrA = \frac{M\left[2 + \lambda k(a_e + bi_1 + B^g i_1)\right]}{M + \lambda k} < 1 + DetA = 1 + \frac{M}{\lambda k + M}.$$

De ii) se deriva que:

$$\frac{a_e + (b + B^g)i_1}{a_e + (a_e h + b + B^g)i_1} < 1.$$

Lo cual se cumple plenamente.

Es decir, cada vez que se produzca un choque de política macroeconómica o de cambio en el contexto internacional, o un choque de oferta que modifique el producto potencial, que desvíe transitoriamente el precio y el tipo de cambio de sus valores de equilibrio estacionario, la naturaleza del modelo permite que el equilibrio macroeconómico se reestablezca.

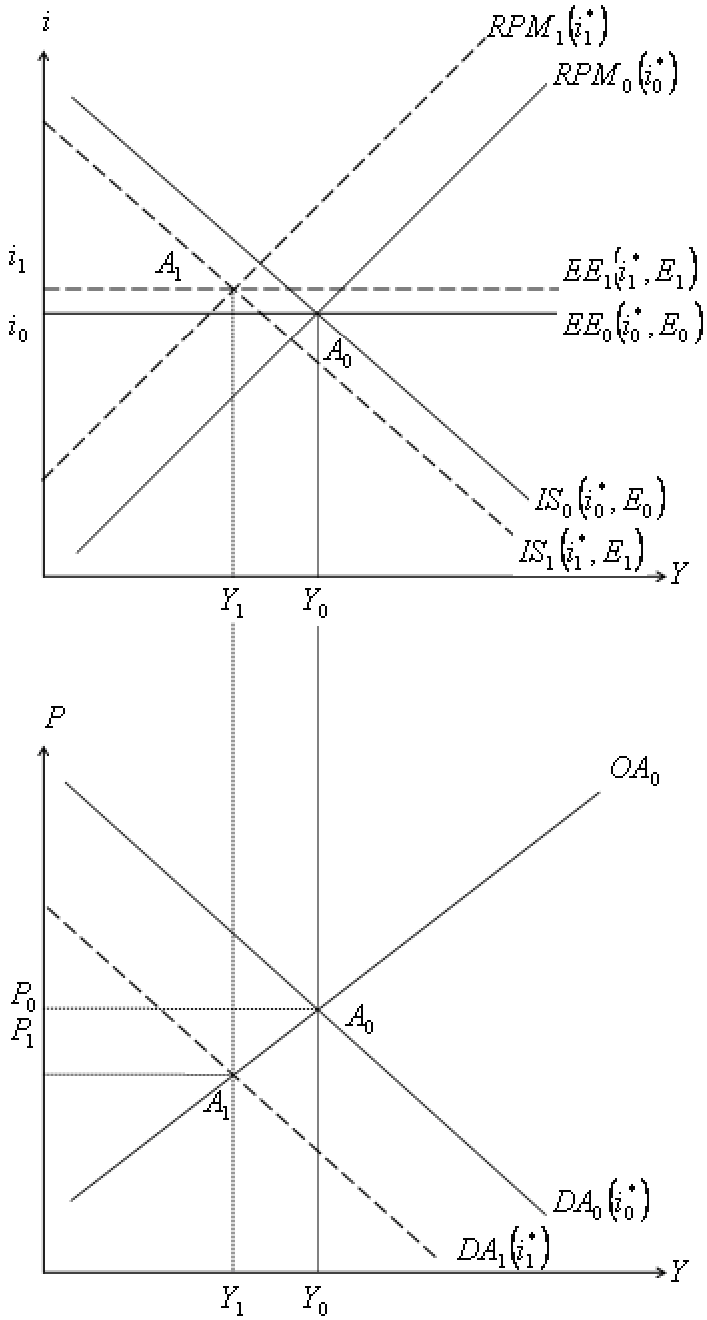
4. Estática comparativa en el modelo

Nuestro punto de partida es un punto del equilibrio estacionario. Como en los modelos anteriores, supongamos que se eleva la tasa de interés internacional.

En la regla de política monetaria la tasa de interés local se eleva en la misma magnitud que la tasa de interés internacional, que equivale a la tasa de interés natural. En la ecuación de arbitraje de tasas de interés, como el diferencial entre las tasas de interés se ha mantenido constante, el tipo de cambio no se mueve, en principio, manteniendo inalterada la demanda por bienes.

La mayor tasa de interés local hace descender la inversión privada y el gasto público, haciendo caer la producción y los precios. El mismo efecto, directo, tiene la tasa de interés internacional, que eleva los intereses de la deuda pública externa y contrae el gasto público. La reducción de la producción hace caer el nivel de precios, lo que tiende a reducir la tasa de interés y elevar el tipo de cambio, debilitando, pero no eliminando, el impacto contractivo inicial de la mayor tasa de interés.

Figura 15



$$dY = -\left[\frac{k\mathrm{M}(b+B^g)}{M+k\lambda}\right]di^* < 0. \tag{44}$$

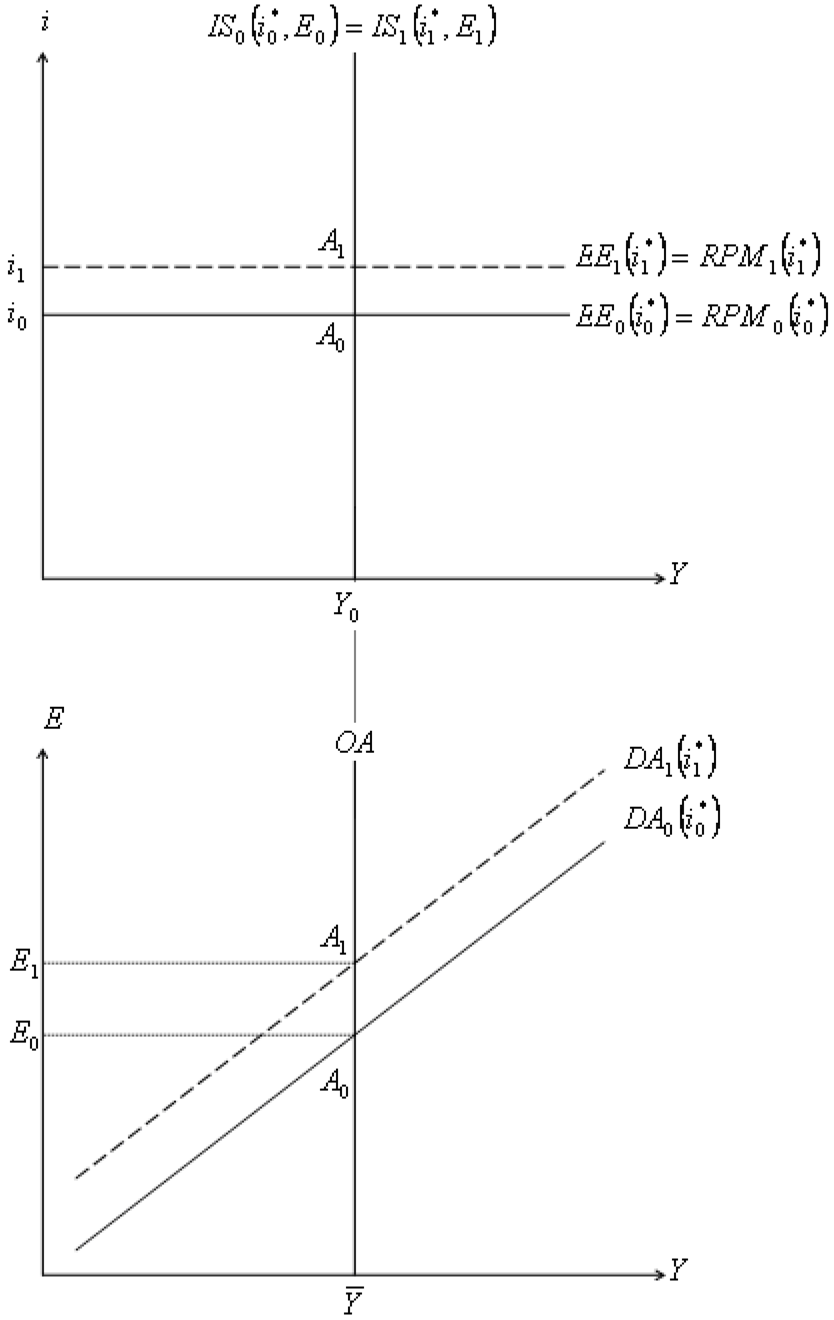
$$dP = -\left[\frac{\mathrm{M}\lambda k(b+B^g)}{M+k\lambda}\right]di^* < 0. \tag{45}$$

$$di = \frac{1+\lambda k a_e(1+hi_1)}{1+\lambda k\left[a_e+(a_e h+b+B^g)i_1\right]}di^* > 0. \tag{46}$$

$$dE = \frac{h\lambda k(b+B^g)i_1}{1+\lambda k\left[a_e+(a_e h+b+B^g)i_1\right]}di^* > 0. \tag{47}$$

En el equilibrio estacionario, la elevación de la tasa de interés internacional solo produce una elevación equivalente de la tasa de interés local y la elevación del tipo de cambio. Se produce un *crowding out* completo entre las exportaciones netas, que se elevan debido al mayor tipo de cambio, y la inversión privada y el gasto público, que se reducen debido a la mayor tasa de interés.

Figura 16



Las respuestas matemáticas para el equilibrio estacionario se obtienen como antes, del sistema de ecuaciones (22), (24), (27) y (28).

.

$$dY = 0 \tag{48}$$

$$dP = 0 \tag{49}$$

$$di = di^* > 0 \tag{50}$$

$$dE = \frac{(b + B^g)}{a_e} di^* > 0 \tag{51}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En el modelo macroeconómico que intenta reflejar los rasgos básicos de la economía peruana:

a. ¿Qué pasa en el corto plazo y en el equilibrio estacionario con la producción, la oferta monetaria y el tipo de cambio cuando cae el PBI externo?
b. ¿Qué pasa en el corto plazo y en el equilibrio estacionario con la producción, la oferta monetaria y el tipo de cambio cuando sube el precio meta fijado por la autoridad monetaria?
c. ¿Qué pasa en el corto plazo y en el equilibrio estacionario con la producción, la oferta monetaria y el tipo de cambio cuando sube la tasa impositiva?
d. ¿Qué pasa en el corto plazo y en el equilibrio estacionario con la producción, la oferta monetaria y el tipo de cambio cuando sube el producto potencial?

PARTE VI: CRECIMIENTO ECONÓMICO

CAPÍTULO 1: EL MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE ROBERT SOLOW[1]

Introduccion

En este capítulo presentamos el modelo de Solow en su versión más básica, donde no existe gobierno ni sector externo. A pesar de su simplicidad, de este modelo se derivan hipótesis importantes acerca de por qué algunos países son pobres y otros son ricos, y acerca de si hay o no convergencia económica entre estos países.

1. Los rasgos básicos

El ahorro, la inversión y las cuentas nacionales

En esta economía cerada y sin gobierno, la producción tiene como destino el consumo de las familias y la inversión bruta empresarial.

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{1}$$

De (1) se deriva que

$$S_t = Y_t - C_t = I_t. \tag{2}$$

El ahorro es una proporción fija del ingreso.

$$S_t = (1-c)Y_t = sY_t; \;\; 0 < s < 1. \tag{3}$$

[1] Esta sección está basada en Sala-i-Martin (2000), Heijdra y Van Der Ploeg (2002, Cap. 14) y Birch y Jorgen (2009, Vol. I).

La inversión bruta empresarial es igual a la suma de la inversión neta, o acumulación efectiva de capital más la depreciación, que puede asumirse que es una función lineal del stock de capital.

$$I_t = \overset{0}{K}_t + \delta K_t . \qquad (4)$$

Conjugando (2), (3) y (4):

$$\overset{0}{K}_t = sY_t - \delta K_t . \qquad (5)$$

La función de producción y la función ahorro

$$Y = BK^{\alpha} L^{1-\alpha} . \qquad (6)$$

Esta función de producción tiene las siguientes propiedades:

i) La producción exibe rendimientos constantes a escala, es decir, debe ser posible producir el doble duplicando la cantidad de los factores, sin alterar el proceso productivo. Matemáticamente esta propiedad se denomina *homogeneidad de grado uno*. Note que el principio de replica no se aplica a la tecnología.

$$\chi Y = B(\chi K)^{\alpha} (\chi L)^{1-\alpha} .$$

ii) Las productividades marginales del capital (Y_K) y del trabajo (Y_L) son positivas y decrecientes.

$$Y_K = \alpha B L^{1-\alpha} K^{\alpha-1} = \alpha B \left[\frac{1}{k}\right]^{1-\alpha} > 0;.\ Y_{KK} = \alpha(\alpha-1) B L^{1-\alpha} K^{\alpha-2} < 0.$$

$$Y_L = (1-\alpha) B K^{\alpha} L^{-\alpha} = (1-\alpha) B k^{\alpha} > 0;\ \ Y_{LL} = -\alpha(1-\alpha) B K^{\alpha} L^{-(1+\alpha)} < 0.$$

iii) Cuando aumenta la cantidad de un factor, aumenta el producto marginal del otro factor.

$$Y_{KL} = Y_{LK} = \alpha(1-\alpha)BK^{\alpha-1}L^{-\alpha} > 0.$$

iv) Se cumplen las condiciones de Inada:

$$\lim_{K\to\infty} Y_K = 0\,;\ \lim_{K\to 0} Y_K = \infty.$$

$$\lim_{L\to\infty} Y_L = 0\,;\ \lim_{L\to 0} Y_L = \infty.$$

El beneficio de la empresa representativa es igual al valor de sus ventas menos el costo salarial y el costo de los servicios del capital.

$$\Pi = Y - wL - rK. \tag{7}$$

La empresa competitiva busca maximizar sus beneficios sujeto a la función de producción.

$$\Pi = BK^{\alpha}L^{1-\alpha} - wL - rK. \tag{8}$$

Las condiciones de primer orden

$$\Pi_K = 0 \Rightarrow Y_K = \alpha B\left[\frac{K}{L}\right]^{\alpha-1} = r. \tag{9}$$

$$\Pi_L = 0 \Rightarrow Y_L = (1-\alpha)B\left[\frac{K}{L}\right]^{\alpha} = w. \tag{10}$$

Es decir, en competencia perfecta, los factores productivos reciben como retribución su productividad marginal.

Remplazando (9) y (10) en (8) se encuentra que el beneficio de la empresa, en competencia perfecta, es nulo. Además, puede mostrarse que

$$\frac{rK}{Y} = \frac{Y_K K}{Y} = \frac{\partial Y / Y}{\partial K / K} = \frac{\alpha B K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} K}{B K^{\alpha} L^{1-\alpha}} = \alpha. \qquad (11)$$

$$\frac{wL}{Y} = \frac{Y_L L}{Y} = \frac{\partial Y / Y}{\partial L / L} = \frac{(1-\alpha) B K^{\alpha} L^{-\alpha} L}{B K^{\alpha} L^{1-\alpha}} = 1-\alpha. \qquad (12)$$

El modelo en términos de producto y capital por trabajador

Si,

$$\frac{\dot{L}}{L} = n. \qquad (13)$$

Conjugando las ecuaciones (5) y (6), obtenemos:

$$\dot{K}_t = sBK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - \delta K_t. \qquad (14)$$

Dividiendo ambos miembros de las ecuaciones (6) y (14) por el número de trabajadores, tenemos las ecuaciones en términos de producto y capital por trabajador

$$y = Bk^{\alpha}. \qquad (15)$$

$$\dot{k} = sBk^{\alpha} - (\delta + n)k. \qquad (16)$$

La ecuación (16) es la ecuación fundamental del modelo de Solow. Según esta ecuación, habrá acumulación de capital por trabajador $(\dot{k} > 0)$ siempre que el ahorro por trabajador (sBk^{α}) sea mayor que la depreciación del capital por trabajador $(\delta + n)k$. Esta “depreciación” debe ser entendida en su versión amplia, pues debe ser suficiente para reemplazar el desgaste de la maquinaria y también para dotar de maquinaria a la población que crece a una tasa fija.

En el equilibrio estacionario, el stock de capital por trabajador se estabiliza. Entonces, (16) se transforman en:

$$sBk^{\alpha} = (\delta + n)k. \tag{17}$$

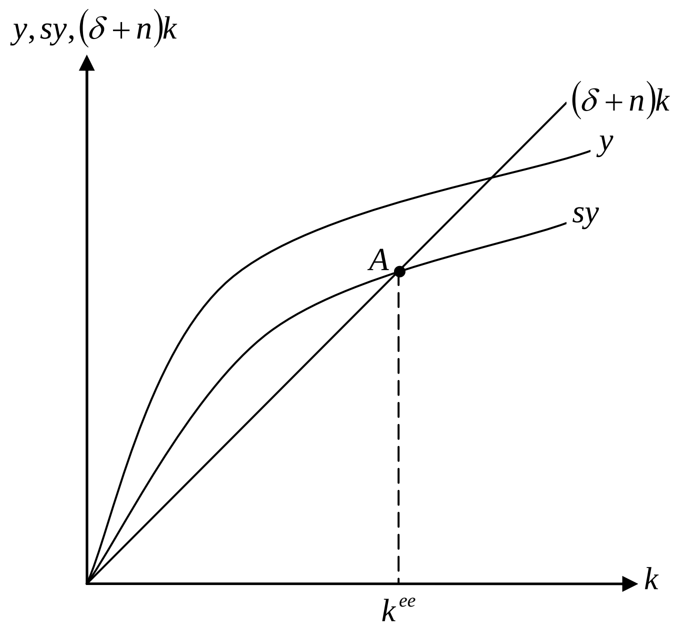
De donde:

$$k^{ee} = \left[\frac{sB}{\delta + n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{sy_0}{(\delta + n)(1-\alpha)} \tag{18}$$

Donde y_0 es el PBI per cápita en la situación inicia y,

$$y^{ee} = B\left[\frac{sB}{\delta + n}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{s}{\delta + n}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{19}$$

Figura 1



Como la tasa de crecimiento del PBI per cápita es cero en el equilibrio estacionario, entonces, en el equilibrio estacionario, el PBI crecerá a la misma tasa del crecimiento poblacional, y las variables asociadas al PBI, el consumo y el stock de capital, crecerán tambien a esa tasa.

3. La estabilidad del equilibrio estacionario y la velocidad de la convergencia

De (16) puede discutirse la cuestión de la estabilidad.

$$\overset{0}{k} = sBk^{\alpha} - (\delta + n)k. \tag{16}$$

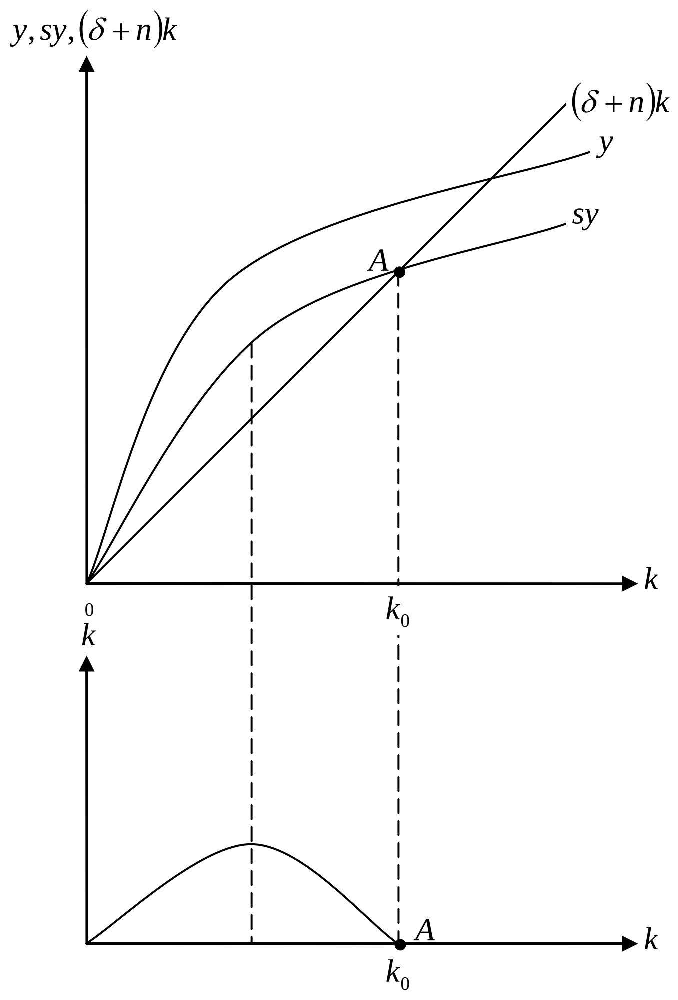
En términos matemáticos, debe cumplirse que

$$\frac{\partial \overset{0}{k}}{\partial k} = sy_k - (\delta + n) < 0. \tag{20}$$

Donde $y_k = B \alpha k^{\alpha-1}$ es la productividad marginal del capital.

En la Figura 2, puede verse que, partiendo desde el origen, la diferencia entre el ahorro y la depreciación, que equivale a la variación del capital por trabajador, va elevándose, alcanza un máximo y luego empieza a reducirse, hasta hacerse nula en el equilibrio estacionario. En este punto de equilibrio estacionario se cumple la condición de estabilidad registrada en la ecuación (20)

Figura 2



¿Cuál es la velocidad de la convergencia hacia el equilibrio estacionario?.

Sea la ecuación diferencial lineal de primer grado:

$$\overset{0}{y} + aY = b.$$

Su solución:

$$y_{(t)} = \left[y_{(0)} - y^{ee}\right]e^{-at} + y^{ee} = \left[y_{(0)} - \frac{b}{a}\right]e^{-at} + \frac{b}{a}.$$

Vamos a transformar la ecuación (16) para hacerla lineal.

Sea

$$x = k^{1-\alpha}. \tag{21}$$

De donde se deriva que:

$$\overset{0}{k} = \frac{\overset{0}{x}\, k^{\alpha}}{(1-\alpha)}. \tag{22}$$

Transformamos (20), dividiendo ambos miembros por k^{α}, y obtenemos:

$$\overset{0}{k}\, k^{-\alpha} + (\delta + n)k^{1-\alpha} = sB. \tag{23}$$

Reemplazando (22) en (23),

$$\overset{0}{x} + (1-\alpha)(\delta + n)x = (1-\alpha)sB. \tag{24}$$

La ecuación (24) es una ecuación diferencial lineal de primer grado, cuya solución es:

$$x_{(t)} = \left[x_{(0)} - \frac{sB}{\delta + n}\right]e^{-(1-\alpha)(\delta+n)t} + \frac{sB}{\delta + n}. \tag{25}$$

Esta ecuación nos dice que, a medida que transcurre el tiempo, la acumulación de capital será más rápida, cuando más alto sea el valor de $(1-\alpha)(\delta+n)$.

Para tener la solución en términos del capital por trabajador, reemplazamos (21) en (25), y obtenemos:

$$k_{(t)} = \left[(k_{(0)}^{1-\alpha} - \frac{sB}{\delta+n})e^{-(1-\alpha)(\delta+n)} + \frac{sB}{\delta+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (26)$$

3. La *regla de oro* de la acumulación de capital

Al equilibrio estacionario que conduce al máximo el consumo percápita se le conoce como *Regla de oro* de la acumulación de capital.

El consumo es la parte del ingreso que no se ahorra. El ahorro, en el equilibrio estacionario, es igual a la depreciación del capital, $sy = (\delta + n)k$. Entonces,

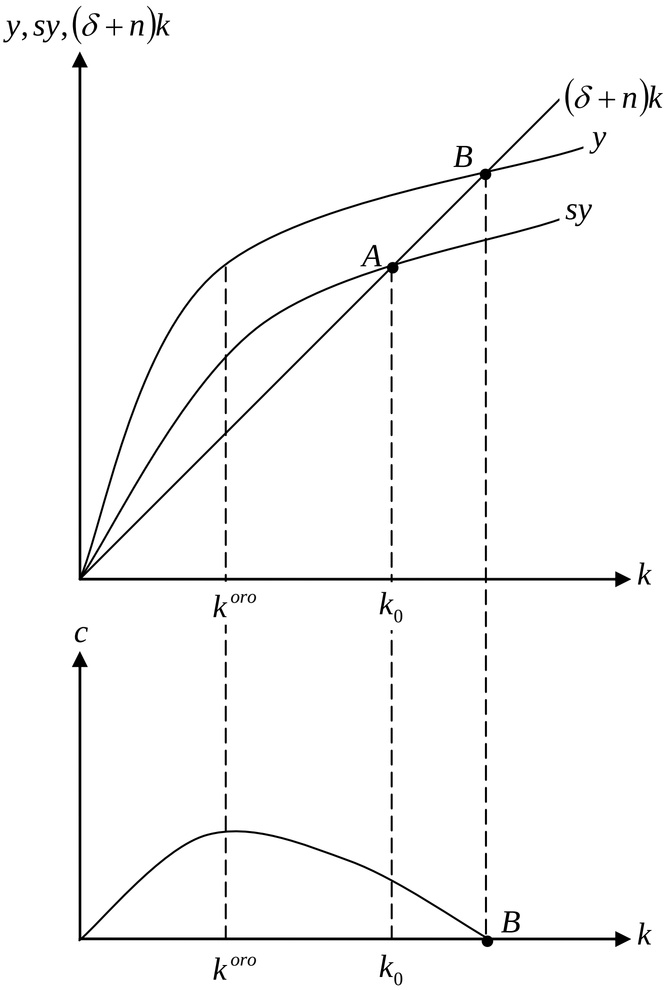
$$c^{ee} = B(k^{ee})^{\alpha} - (\delta + n)k^{ee} \qquad (27)$$

Maximizando esta función, respecto al capital por trabajador:

$$k^{oro} = \left[\frac{\alpha B}{\delta+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (28)$$

De (28) y (18) puede observarse que este capital per cápita que maximiza el consumo per cápita es mayor (menor) que el capital per cápita del equilibrio estacionario cuando la participación del capital en el ingreso nacional es mayor (menor) que la tasa de ahorro $(\alpha > s)$.

Figura 3



.

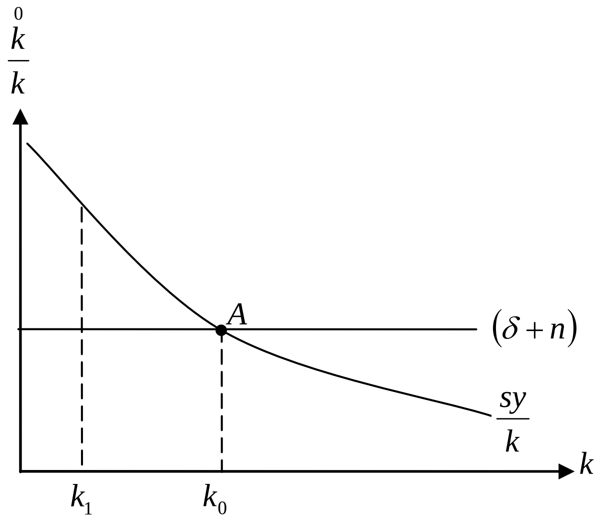
En el caso mostrado, el capital per cápita del estado estacionario es mayor que el capital que maximiza el consumo por trabajador. Es una situación de *ineficiencia dinámica*, en el sentido de que esta economía puede tener un consumo per cápita mayor, con un capital por trabajador menor, que puede alcanzarse reduciendo la propensión a ahorrar.

4. La tasa de crecimiento en el modelo de Solow

A partir (16)

$$\frac{\overset{0}{k}}{k} = sBk^{\alpha-1} - (\delta + n). \tag{29}$$

Figura 4

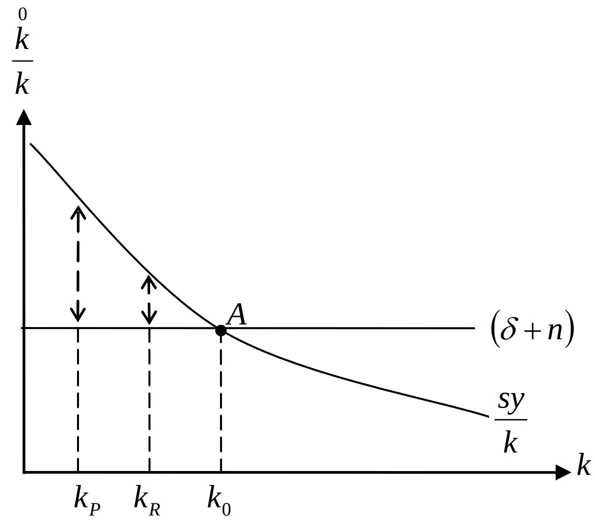


Esta economía, a la larga, en el equilibrioe stacionario, no crece. Es decir, en el modelo de Solow, el crecimiento de largo plazo no se puede dar cuando la economía ahorre una fracción constante del producto, aun cuando esta propensión al ahorro sea alta.

5. La convergencia absoluta y condicional

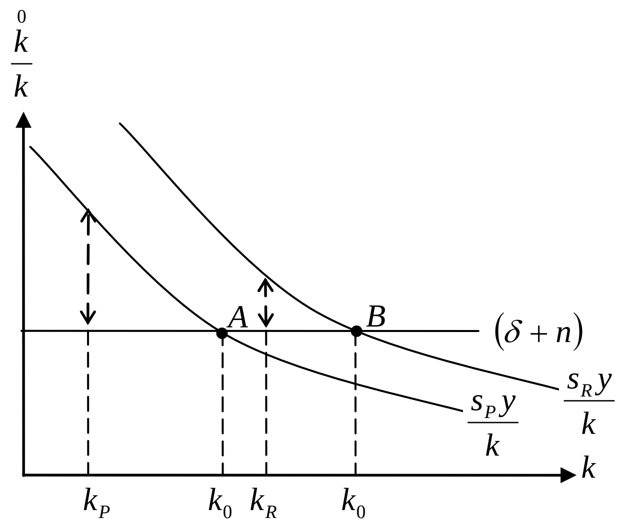
Si dos economías son idénticas, salvo en sus dotaciones de capital por trabajador, la economía con menor dotación de capital debe crecer a un ritmo mayor que la economía con mayor dotación.

Figura 5



Si las economías son diferentes por razones distintas a la de la dotación de capital per cápita, el modelo de Solow no predice una tasa de crecimiento mayor en los países pobres. En este caso es mejor referirse a la *convergencia condicional*.

Figura 6



6. Estatica comparativa del estado estacionario.

Las variables exógenas del modelo de Solow son la propensión a ahorrar, la tasa de crecimiento poblacional, la tasa de depreciación y el nivel de desarrollo tecnológico. La única variable endógena en la forma reducida del modelo de Solow es el capital por trabajador (o el PBI per cápita). Obtenida esta variable, puede conocerse el valor de las variables vinculadas como el consumo, el ahoorro y las productividades marginales del trabajo y el capital.

¿Qué sucede con el capital per cápita cuando se produce un alza de la propensión a ahorrar?

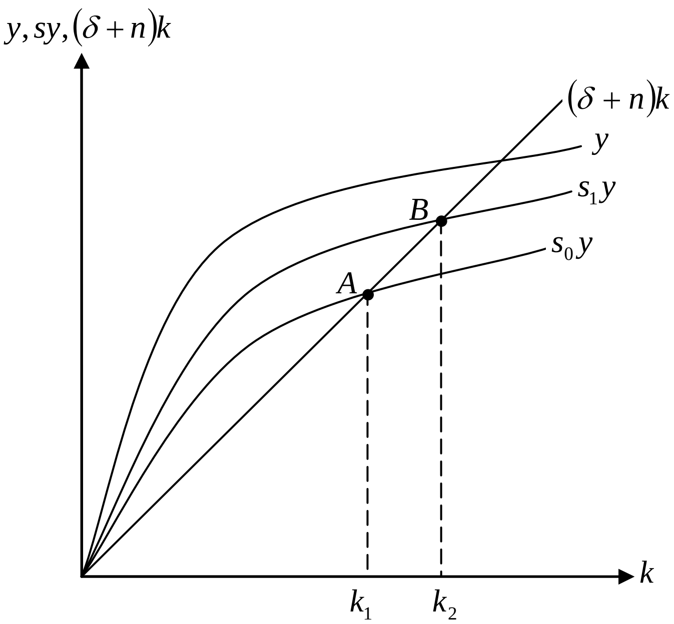
Partimos de un equilibrio estacionario inicial donde el ahorro es igual a la depreciación. Cuando sube la tasa de ahorro, en la ecuación (16), el ahorro por trabajador se pone por encima de la depreciación por trabajador. ¿Cuál es el mecanismo de ajuste para que el equilibrio se restablezca?

El capital por trabajador tiene que elevarse. Al elevarse el capital por trabajador, se elevan tanto el ahorro como la depreciación. Como la elevación de la depreciación es mayor que la del ahorro[2], el ritmo de acumulación del capital tiende a reducirse, hasta hacerse cero y la economía alcanza así un nuevo equilibrio estacionario, con un mayor capital por trabajador.

En la Figura 7 se muestra la elevación del capital por trabajador (y, como resultado, del PBI por trabajador), como consecuencia de la mayor propensión a ahorrar.

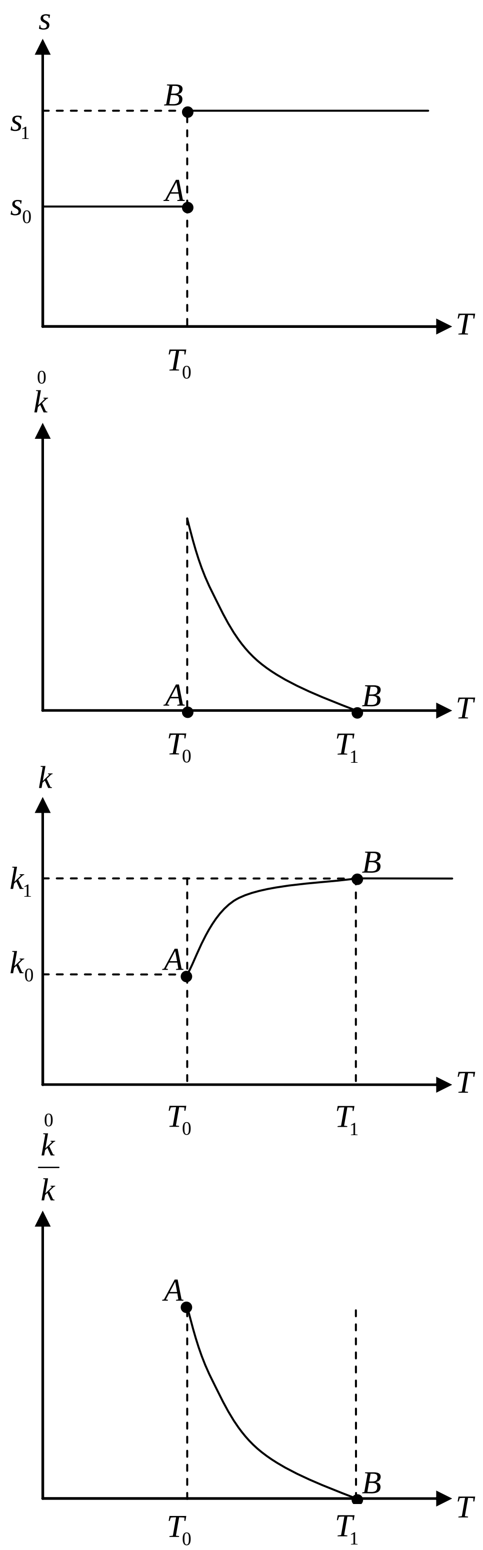
[2] Por la condición de estabilidad.

Figura 7



En la Figura 8 puede observarse la dinámica de ajuste de esta economía ante un alza en la propensión a ahorrar. En la parte superior de la figura se muestra el salto que se produce en la propensión a ahorrar, que sube de s_0 a s_1 y se queda indefinidamente en ese nuevo nivel. Más abajo se muestra como se produce, transitoriamente, una elevación de la tasa de crecimiento de la economía. Más abajo, se muestra la dinámica del capital por trabajador que sube desde k_0 hasta alcanzar, gradualmente, el nuevo nivel de equilibrio estacionario k_1. Por último, se muestra cómo, con el alza de la propensión a ahorrar, se produce una tasa de crecimiento positiva transitoria, que se vuelve a hacer cero en el equilibrio estacionario.

Figura 8



La respuesta matemática se obtiene a partir de la ecuación (18).

$$dk = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{sB}{\delta+n}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[\frac{B}{\delta+n}\right]ds = \frac{sy_0}{(1-\alpha)(\delta+n)}ds > 0 \qquad (30)$$

Es decir, el alza de la propensión a ahorrar impactará con más fuerza en el capital por trabajador cuanto más alto sea el PBI per cápita inicial y la participación de la mano de obra en el ingreso nacional, y cuanto más bajas sean la tasa de crecimiento poblacional y la tasa de depreciación.

EJERCICIOS PROPUESTOS

En el modelo de crecimiento económico de Robert Solow:

a. ¿Qué pasa con el producto y el consumo per cápita si sube la propensión al ahorro?
b. ¿Qué pasa con el producto y el consumo per cápita si sube la tasa de depreciación?
c. Si la única diferencia entre dos países es la dotación de capital por trabajador inicial, ¿cuál de los países debiera crecer más rápido?
d. Si hay diferencias en la dotación de capital por trabajador y también en el nivel de desarrollo tecnológico, ¿cuál de los países debe crecer más rápido?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Birch, Peter y Hans Jorgen

2008 *Introducción a la macroeconomía avanzada. Volumen I: crecimiento económico*. McGrawHill, /Interamericana de Espana, Madrid.

Heijdra, Ben y Frederick Van Der Ploeg

2002 *Foundations of Modern Macroeconomics*. Oxford University Press, New York.

Sala –I-Martin, Xavier

2000 *Apuntes de crecimiento económico* (segunda edición). Antoni Bosch editor, Madrid.

Solow, Robert

1956 *A Contribution to the Theory of Economic Growth*. Quarterly Journal of Economics, Vol 70.

CAPÍTULO 2: EL MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE RAMSEY[3]

Introduccion

El modelo de crecimiento económico de Ramsey (1927) es similar al modelo de de Solow (1956). Como en Solow, la tasa de crecimiento de la mano de obra y de la tecnología siguen siendo son exógenas.

La diferencia básica es que, mientras en el modelo de Solow la propensión al consumo es exógena, en el modelo de Ramsey esta propensión al consumo es endógena

Como la decisión consumo-ahorro se realiza mediante un proceso de optimización, el ahorro ya no es una proporción constante del ingreso, sino que se ajusta en cada periodo. Además, se hace una distinción explícita entre familias y empresas, las cuales interactúan en tres mercados competitivos (financiero, laboral y de bienes). A partir de la interacción entre familias y empresas en estos tres mercados se obtiene la evolución del capital y, por lo tanto, del producto.

1. Supuestos y rasgos básicos del modelo

Existen dos agentes económicos, las familias y las empresas que interactúan en tres mercados competitivos: de bienes, financiero y laboral.El precio de los bienes es el numerario.

El ahorro de las familias, en bonos, rinden una tasa de interés real r. Este ahorro es tomado luego por las empresas bajo la forma de capital, el cual utilizan como factor en el proceso productivo. Las familias ofrecen mano de obra a las empresas a un determinado salario real w.

[3] Este capítulo lo escribió Liu Mendoza. El desarrollo de este modelo sigue de cerca a Sala-i-Martin (2000).

El comportamiento de las familias

Para su decisión de consumo-ahorro, las familias maximizan una función de utilidad intertemporal, en la cual deciden cuál es la trayectoria de consumo y, por lo tanto, también del ahorro, en cada momento del tiempo.

Inicialmente se supondrá que el horizonte de tiempo relevante es infinito y luego, se contrastarán los resultados obtenidos con el caso en el que el horizonte temporal es finito.

La función de utilidad del consumidor representativo:

$$U(0)=\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}u(c(t))dt \tag{1}$$

En tiempo discreto:

$$U(0)=\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+\rho}\right)^t u(c(t)) \tag{2}$$

$u(c(t))$ es la función de utilidad instantánea; c_t es el consumo per cápita en cada periodo t; n es la tasa de crecimiento de la población; y ρ es la tasa de descuento intertemporal.

Para garantizar que el problema tenga significado económico, se requiere que la utilidad intertemporal sea finita y acotada. Por lo tanto, el factor de descuento intertemporal, $e^{-(\rho-n)t}$ y $\left(\frac{1+\mathrm{n}}{1+\rho}\right)^t$, no puede ser explosivo, sino que debe tender a cero. Por lo tanto, es necesario suponer que $\rho > n$.

$u(c(t))$ es cóncava ($u'(c)>0$ y $u''(c)<0$), por lo cual las familias buscan suavizar su nivel de consumo en todos los periodos. Por conveniencia matemática, trabajamos con la siguiente función de utilidad:

$$u\left(c(t)\right)=\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} \qquad (3)$$

Esta función de utilidad se conoce como *constant relative risk* aversion (CRRA) o, simplemente, aversión relativa al riesgo constante.

Las familias obtienen ingreso de sus ingresos salariales y de la la rentabilidad de sus bonos. La restricción que enfrenta la familia en cada momento del tiempo es:

$$\overset{0}{B}(t)+C(t)=w(t)L(t)+r(t)B(t) \qquad (4)$$

Donde: B y $\overset{0}{B}$ representan el stock de bonos y la adquisición de bonos por parte de las familias, respectivamente, C el consumo, w el salario real, L la mano de obra ofrecida por las familias y r la tasa de interés real.

Dividiendo todo entre $L(t)$, y recordando que $\frac{\overset{0}{B}(t)}{L(t)}=\overset{0}{b}(t)+nL(t)$, la restricción presupuestaria per cápita es:

$$\overset{0}{b}(t)+nb(t)+c(t)=w(t)+r(t)b(t)$$

De donde se deriva:

$$\overset{0}{b}(t)=w(t)+\left(r(t)-n\right)b(t)+c(t) \qquad (5)$$

El problema que enfrentan las familias es entonces:

$$\begin{aligned} &Max\ U\left(0\right)=\int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t}\left(\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)dt \\ &s.a. \quad \overset{0}{b}(t)=w(t)+\left(r(t)-n\right)b(t)-c(t) \qquad (6) \\ &\qquad Lim_{t\to\infty} e^{-(\rho-n)t}u\left(c(t)\right)=0 \end{aligned}$$

La función Hamiltoniana toma la siguiente forma:

$$H\big(c(t), b(t), \lambda(t)\big) = e^{-(\rho-n)t}\left(\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right) + \lambda(t)\big[w(t) + \big(r(t)-n\big)b(t) - c(t)\big] \qquad (7)$$

Donde λ es la variable de coestado; en este problema, representa el costo marginal en valor presente del ingreso.

Las condiciones de primer orden son:

$$H_c = 0,$$

$$H_b = -\overset{0}{\lambda}(t), \qquad (8)$$

$$Lim_{t\to\infty} b(t)\lambda(t) = 0.$$

Resolviendo (7), aplicando (8), obtenemos:

$$H_c = e^{-(\rho-n)t}c(t)^{-\theta} - \lambda(t) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-(\rho-n)t}c(t)^{-\theta} = \lambda(t) \qquad (9)$$

$$H_b = \lambda(t)\big(r(t)-n\big) = -\overset{0}{\lambda}(t) \qquad (10)$$

$$Lim_{t\to\infty} b(t)\lambda(t) = 0 \qquad (11)$$

Si aplicamos logaritmo neperiano a la ecuación (9) y a continuación diferenciamos con respecto al tiempo, obtendremos:

$$\frac{\overset{0}{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = -\big(\rho - n\big) - \theta\frac{\overset{0}{c}(t)}{c(t)} \qquad (12)$$

Ordenando esta expresión y reemplazando en (10), obtendremos la ecuación de Euler, que resume la regla de decisión de consumo-ahorro óptima de las familias:

$$\rho + \theta \frac{\overset{0}{c}(t)}{c(t)} = r(t) \qquad (13)$$

El lado izquierdo de esta expresión representa las ganancias en términos de utilidad de consumir en el periodo actual. En principio, las familias ganan ρ por consumir en el presente en vez de ahorrarlo para conumir en periodos futuros. Una segunda fuente de ganancia está asociada al interés de los individuos de mantener una trayectoria de consumo suave, y está representada por el término $\theta \frac{\overset{0}{c}(t)}{c(t)}$. Este término nos dice que cuando las familias perciban que el consumo futuro va a ser mayor (es decir, cuando esperan que $\frac{\overset{0}{c}(t)}{c(t)} > 0$), deseará aumentar su consumo presente y, por lo tanto, reducirá su consumo futuro en la proporción que indique su elasticidad de sustitución. Así, esta expresión El lado derecho representa las ganancias de ahorrar, la cual está expresada como la tasa de interés de los ahorros r. Según esta expresión, los agentes optimizan cuando igualan las ganancias de consumir a las ganancias de ahorrar.

(11) es la condición de transversalidad, e indica que el valor del capital per cápita de las familias $b(t)\lambda(t)$ debe tender a cero a medida que el tiempo tiende al infinito.

El comportamiento de las empresas

Las empresas producen bienes, utilizando capital y mano de obra.

$$Y(t) = F\big(K(t), L(t)\big) \qquad (14)$$

O, en términos per capita:

$$y(t) = f\left(k(t)\right) \tag{15}$$

Donde Y es el nivel de producción, K es el capital y L es la mano de obra; las minúsculas representan variables en términos pe cápita. Las propiedades de esta función de producción son las mismas del modelo de Solow. La función objetivo de las empresas es la siguiente función de beneficios:

$$\Pi(t) = F\left(K(t), L(t)\right) - \left(r(t) + \delta\right)K(t) - w(t)L(t). \tag{16}$$

Donde δ es la tasa de depreciación del capital.

Que, en términos de producto per capita se puede expresar como:

$$\pi(t) = f\left(k(t)\right) - \left(r(t) + \delta\right)k(t) - w(t) \tag{17}$$

La condición de optimización del capital se puede hallar directamente:

$$Y_K = f'\left(k(t)\right) = r(t) + \delta \tag{18}$$

Para hallar la productividad marginal de la mano de obra, expresaremos la función de producción como $Y = Lf\left(k(t)\right)$. La derivada parcial de la producción con respecto a L es:

$$\begin{aligned} Y_L &= f\left(k(t)\right) - L\frac{K}{L^2} f'\left(k(t)\right) \\ &= f\left(k(t)\right) - k(t) f'\left(k(t)\right) \end{aligned} \tag{19}$$

Por lo que la demanda de mano de obra implica que:

$$Y_L = f(k(t)) - k(t) f'(k(t)) = w(t) \tag{20}$$

La función de producción se asume que es una Cobb-Douglas $y(t) = f\left(k(t)\right) = Ak(t)^{\alpha}$, por lo que las condiciones (18) y (20) se convierten en:

$$\alpha A k(t)^{-(1-\alpha)} = r(t) + \delta \tag{21}$$

$$y(t) - \alpha A k(t)^{-(1-\alpha)} = w(t) \tag{22}$$

2. Equilibrio competitivo

Un equilibrio competitivo es una secuencia de cantidades $c(t), b(t), k(t),$ y $y(t)$ y de precios $r(t)$ y $w(t)$ tales que se cumpla que:

a) Las familias maximicen su función de utilidad intertemporal, dada su restricción presupuestaria y los precios $r(t)$ y $w(t)$.

b) Las empresas maximicen su función de beneficios, dada su tecnología y los precios $r(t)$ y $w(t)$.

c) En cada periodo, todos los mercados se encuentren en equilibrio.

Sustituyendo (20) y (21) en (5), se obtiene:

$$\overset{0}{k}(t) = A k(t)^{\alpha} - c(t) - (\delta + n) k(t) \tag{22}$$

Por último, si sustituimos (20) en la ecuación de Euler, y definimos γ_c como la tasa de crecimiento del consumo per cápita, obtenemos:

$$\gamma_c \equiv \frac{\overset{0}{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\left(\alpha A k(t)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right) \tag{23}$$

(22) y (23) definen el sistema dinámico que gobierna el comportamiento del stock de capital y del consumo.

3. La dinámica de transición

En el equilibrio de estado estacionario debe cumplirse que:

$$\overset{0}{k}(t) = \overset{0}{c}(t) = 0 \tag{24}$$

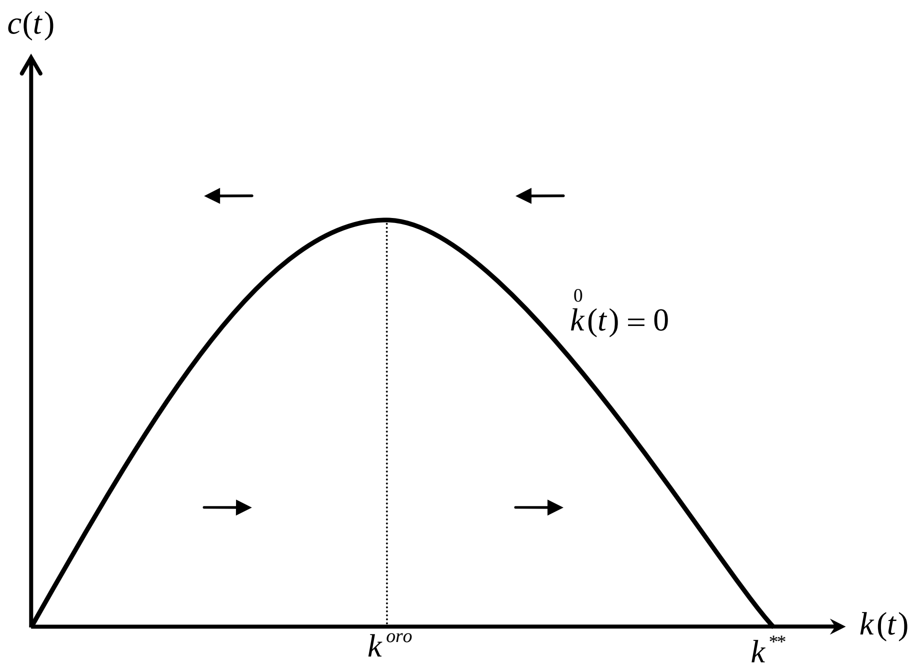
Por lo tanto, las ecuaciones (22) y (23) se convierten en:

$$c(t) = Ak(t)^{\alpha} - (\delta + n)k \tag{25}$$

$$c(t)\left[\frac{1}{\theta}\left(Ak(t)^{-(1-\alpha)} - \rho - \delta\right)\right] = 0 \tag{26}$$

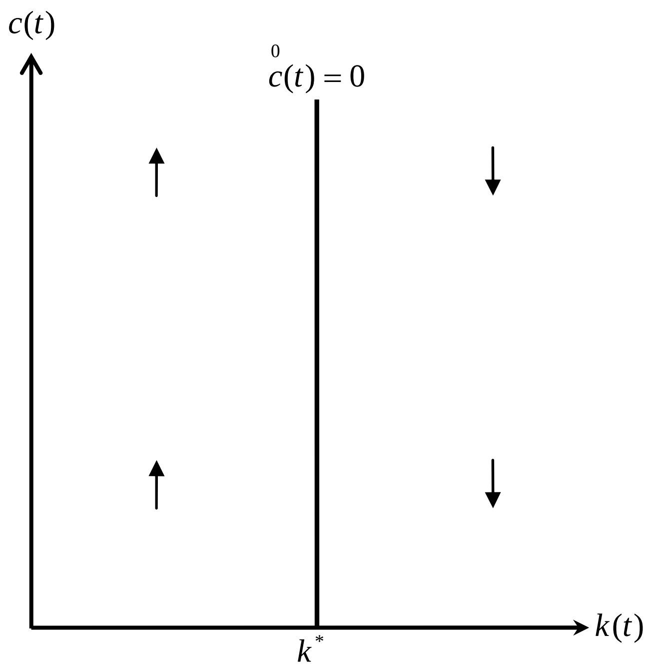
La ecuación (25) pasa por el origen, es inicialmente creciente pero luego es decreciente, y alcanza su punto máximo en $k^{*} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Este valor corresponde al valor del capital percápita de la regla de oro de Solow. Finalmente, cruza nuevamente el eje de las abcisas en k^{**}.

Figura 1



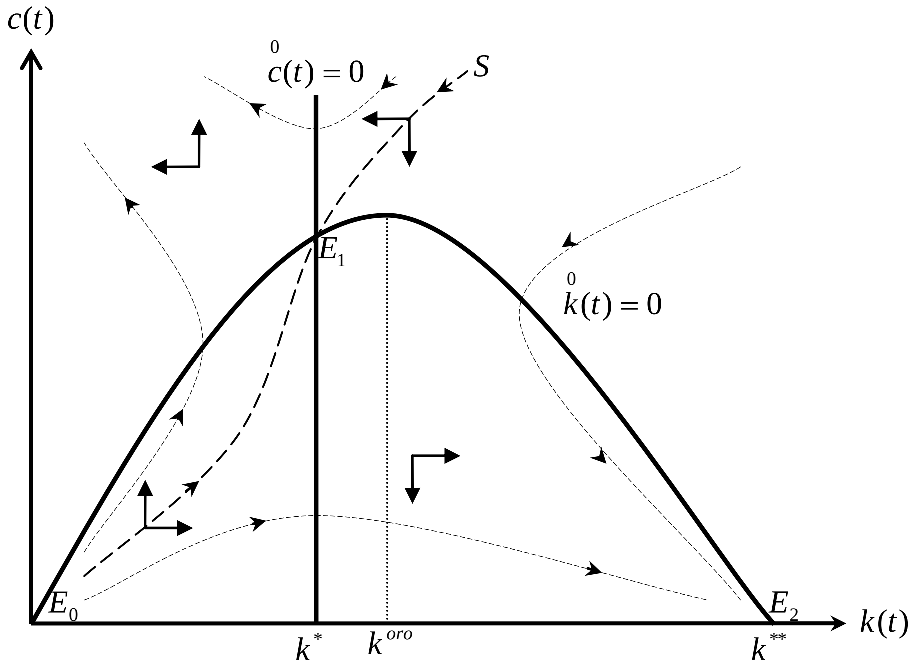
(26) muestra la dinámica del consumo.Existen dos maneras de satisfacer la condición $\overset{0}{c}(t) = 0$: (i) cuando $c(t) = 0$, que graficamente corresponde a una línea horizontal que coincide con el eje de las abcisas; y (ii) cuando $\frac{1}{\theta}\left(Ak(t)^{-(1-\alpha)} - \rho - \delta\right) = 0$, que graficamente corresponde a una línea vertical pues es independiente del consumo, y que pasa por $k^* = \left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Como $\rho > n$, este valor es inferior al capital de la regla de oro en el modelo de Solow.

Figura 2



Si juntamos los diagramas de fase del capital percápita y del consumo percápita, obtendremos el sistema dinámico de esta economía:

Figura 3



La condición (24) se cumple en todos los puntos en los que las curvas $\overset{0}{c}(t) = 0$ y $\overset{0}{k}(t) = 0$ se cruzan. Ello ocurre en tres puntos[4], E_0, E_2 y E_3. El equilibrio E_0 es un equilibrio inestable, puesto que si partimos en un punto muy cercano a dicho equilibrio, las flechas indican que nos alejamos de ese punto. tnoen dirección contraria. El equilibrio E_3 es, por el contrario, un equilibrio estable pues las flechas a su alrededor señalan hacia él.

El caso económicamente relevante es E_2, que es el único que lleva a cantidades positivas de consumo percápita en el largo plazo. Este equilibrio se conoce como un equilibrio de punto de silla, y se caracteriza porque existen solamente dos cuadrantes desde los cuales se puede llegar a dicho equilibrio; desde los dos cuadrantes restantes, indefectiblemente, la economía se aleja del equilibrio. En este caso, existe solamente una trayectoria que tiende al equilibrio, que es conocida como senda estable. Por lo tanto, el sistema es globalmente inestable.

---

[4] Recordar que en el eje horizontal también se cumple $\overset{0}{c}(t) = 0$.

En el modelo de Ramsey la senda estable tiene pendiente positiva (un incremento del capital percápita es acompañado por un incremento del consumo percápita), y está representada por la curva S en la Figura 3.

En el modelo con horizonte infinito[5], los agentes económicos escogerán necesariamente la senda estable. Ello ocurre debido a que es la única que satisface todas las condiciones de optimalidad en todos los momentos del tiempo, incluyendo la condición de transversalidad.

Todas las trayectorias por encima de la senda estable necesariamente terminan en el eje vertical, en un punto en el que el capital per cápita es nulo. En ese momento, se debe producir un salto en el consumo hasta cero, que es equivalente a una tasa de crecimiento de menos infinito. Esto viola la condición de Euler (ecuación 23) pues, según esta ecuación, cuando el capital percápita es nulo, el consumo debe crecer a una tasa de crecimiento infinita y positiva.

Por otro lado, todas las trayectorias por debajo de la senda estable necesariamente terminan en el eje horizontal, en un punto en el que el consumo percápita es nulo. Cuando ello ocurre, no se cumple la condición de transversalidad.

4. El planificador social

La función objetivo del planificador social es:

$$\int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t}\left(\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)dt \qquad (27)$$

Mientras que la restricción presupuestaria es:

[5] Posteriormente se mostrará por qué con horizonte temporal finito los agentes racionales no escogen la senda estable, sino trayectorias divergentes ubicadas por encima de la senda estable.

$$Y(t) = F\big(K(t), L(t)\big) = C(t) + I(t) \qquad (28)$$

$$Y(t) = F\big(K(t), L(t)\big) = C(t) + \overset{0}{K}(t) + \delta K(t) \qquad (29)$$

En términos percápita

$$f\big(k(t)\big) = c(t) + \overset{0}{k}(t) + (\delta + n)k(t) \qquad (30)$$

Asumiendo una tecnología Cobb-Douglas

$$\begin{aligned} &Max\,U(0) = \int_0^{\infty} e^{-(\rho - n)t}\left(\frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right)dt \\ &s.a. \quad Ak^{\alpha} = c(t) + \overset{0}{k}(t) + (\delta + n)k(t) \end{aligned} \qquad (31)$$

La solución del planificador central es exactamente la misma que la que se obtiene asumiendo mercados competitivos.

El Hamiltoniano es:

$$H\big(c(t), b(t), \lambda(t)\big) = e^{-(\rho - n)t}\left(\frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right) + \lambda(t)\Big(Ak(t)^{\alpha} - c(t) - (\delta + n)k(t)\Big) \qquad (32)$$

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$H_c = e^{-(\rho - n)t}c(t)^{-\theta} - \lambda(t) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-(\rho - n)t}c(t)^{-\theta} = \lambda(t) \qquad (33)$$

$$H_k = \lambda(t)\Big(\alpha A k(t)^{-(1-\alpha)} - n - \delta\Big) = -\overset{0}{\lambda}(t) \qquad (34)$$

$$Lim_{t \to \infty} k(t)\lambda(t) = 0 \qquad (35)$$

Tomando logaritmos y derivadas a (33), y reemplazando en (34), obtenemos:

$$\theta \frac{\overset{0}{c}(t)}{c(t)} = \alpha A k(t)^{-(1-\alpha)} - \rho - \delta \tag{36}$$

Esta ecuación, junto con (30) y (35) determinan la dinámica del capital percápita y del consumo percápita, las cuales coinciden con las condiciones de optimalidad en mercados competitivos. Esto significa que la solución de mercado es socialmente óptima pues es equivalente a la del planificador social. Ello ocurre en situaciones en las que no existen externalidades ni distorsiones en la economía. En casos como estos, la solución del mercado no será óptima.

5. El caso con horizonte temporal finito

Cuando se asume horizonte finito la trayectoria óptima no es la senda estable, sino son trayectorias que están por encima de ella. Ello se debe a que no es óptimo para el individuo dejar ahorro una vez que ha alcanzado el último periodo en su vida; en vez de eso, preferirá consumir e incrementar su utilidad. En la medida de que en equilibrio el ahorro de las famlias debe igualar al capital demandado por las empresas, resultará óptimo utilizar todo el capital en el último periodo de su vida.

Si bien son infinitas las trayectorias que puede elegir el individuo, aquella que finalmente elija dependerá crucialmente del horizonte temporal. En particular, si el horizonte temporal es corto, elegirá una trayectoria que llegue rápidamente al eje vertical, mientras que si este horizonte es largo, elegirá una trayectoria que demore en alcanzar el eje vertical.

Partamos del problema del planificador, con la única diferencia que el horizonte temporal es $T < \infty$.

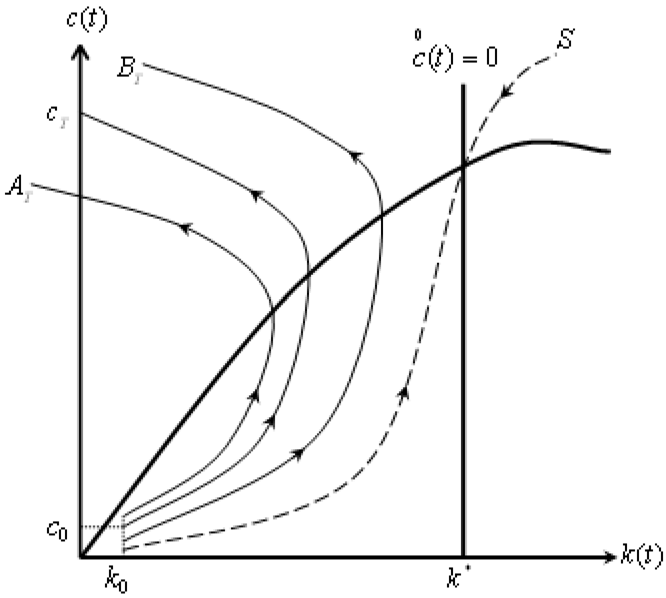
$$Max\ U(0) = \int_0^T e^{-(\rho-n)t}\left(\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)dt \qquad (37)$$

$$s.a. \quad Ak^{\alpha} = c(t) + \dot{k}(t) + (\delta+n)k(t)$$

Las condiciones de optimalidad (33) y (34); sin embargo, la condición de transversalidad es ahora:

$$\lambda(T)k(T) = 0 \qquad (38)$$

Figura 4



Como $\lambda(t)$ no puede ser negativo, el cumplimiento de la condición de transversalidad implica que el stock de capital en el periodo T sea nulo ($k(T) = 0$). La senda estable no cumple esta condición, pues a lo largo de ella el capital per cápita nunca es nulo. Lo mismo ocurre con las trayectorias que se encuentran por debajo de la senda estable: estas trayectorias tienden al equilibrio E_2 que tiene un stock de capital positivo.

Las únicas trayectorias que pueden cumplir con la condición de transversalidad son aquellas que se encuentran por encima de la senda estable, puesto que en algún momento del tiempo van a llegar a un punto en el que el stock de capital es nulo. La familia debe escoger un c_0 tal que, en el momento T, el stock de capital sea nulo. Si este consumo es muy alto, agotará muy rápidamente el capital, por lo que no podrá producir en los últimos periodos de su vida. Si, por el contrario, es muy bajo, en el momento de su muerte no habrá agotado todo su stock de capital y, por lo tanto, no estará optimizando.

6. Estática comparativa en el modelo de Ramsey

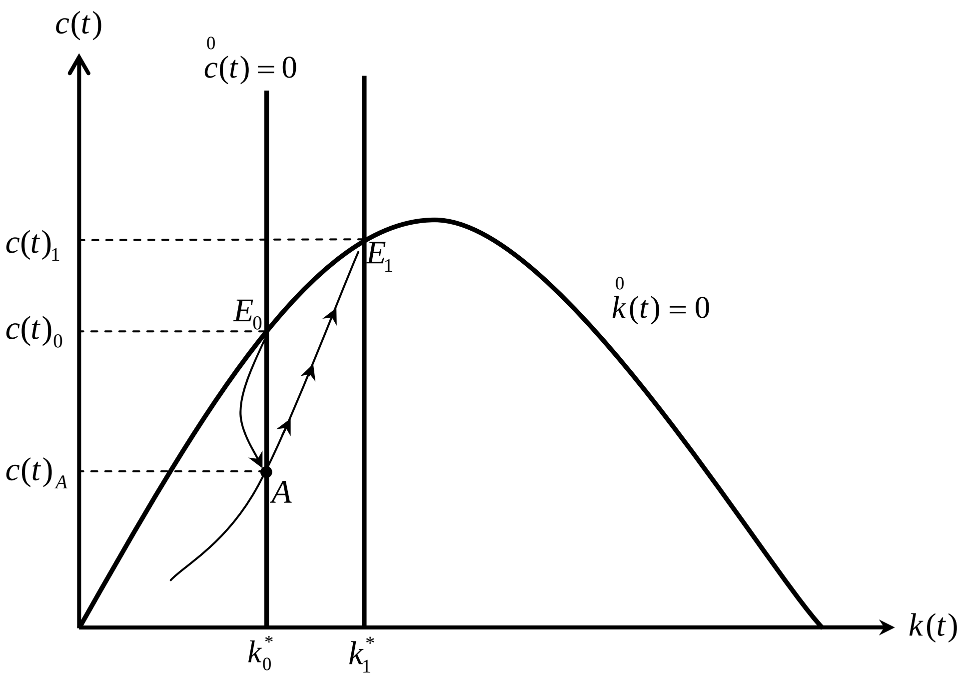
Las variables endógenas son el consumo y el capital. Las variables exógenas son la tasa de depreciación, el crecimiento poblacional, la tasa de descuento subjetivo y la elasticidad de sustitución intertemporal.

¿Qué sucede con el capital per cápita y el consumo per cápita cuando se reduce ρ ?. Partimos de un equilibrio estacionario inicial.

Como el consumo per cápita es una variable de control, en el instante en que se reduce ρ las familias ajustan automaticamente su nivel de consumo per cápita a un nivel menor. Por lo tanto, según la ecuación 22, las familias consumen una proporción menor de su capital per cápita, el ahorro se incrementa, y se inicia un nuevo proceso de acumulación de capital per cápita. Entonces, a partir la ecuación (23) y al nuevo nivel de ρ, el consumo per cápita empieza a incrementarse. Este proceso continúa hasta tender al nuevo equilibrio estacionario.

En la Figura 5 se observa la transición al nuevo estado estacionario. La reducción de ρ solamente afecta a la ecuación (23), por lo que la curva $\overset{0}{c}(t) = 0$ se desplaza hacia la derecha, mientras que la curva $\overset{0}{k}(t) = 0$ se mantiene inalterada. La reducción inicial del consumo per cápita lo lleva desde $c(t)_0$ hasta $c(t)_A$, que se encuentra en la nueva senda estable. Luego, la transición al nuevo estado estacionario implica un incremento del consumo per cápita y del capital per cápita mayores a los iniciales.

Figura 5



De (22) y (23) se hallan los niveles de capital per cápita y consumo per cápita en el estado estacionario. De (23):

$$k^{ee}=\left(\frac{\alpha A}{\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{39}$$

(39) en (22)::

$$c^{ee}=A\left(\frac{\alpha A}{\delta+\rho}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-(\delta+n)\left(\frac{\alpha A}{\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{40}$$

El efecto sobre el capital per cápita es:

$$\frac{dk^{ee}}{d\rho}=-\frac{\alpha A^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}\left(\frac{1}{\delta+\rho}\right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}<0 \tag{41}$$

Mientras que el efecto sobre el consumo per cápita es:

$$\frac{dc^{ee}}{d\rho}=\frac{\partial c^{ee}}{\partial k^{ee}}\frac{\partial k^{ee}}{\partial \rho}=\left[\alpha A k^{-(1-\alpha)}-(\delta+n)\right]\left[-\frac{\alpha A^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}\left(\frac{1}{\delta+\rho}\right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}\right] \tag{42}$$

Como cuando el capital es menor al capital de estados estacionario $\alpha A k^{-(1-\alpha)} > (\delta + n)$, esta expresión tiene signo negativo.

Referencias bibliográficas

Cass, D.

1965 *Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation.* Review of Economic Studies, 32 (julio), 233-240.

Koopmans, T.

1965 *On the concept of optimal economic growth*. En: The Econometric approach to development planning. Amsterdam, North Holland (1965).

Ramsey, F.

1927 *A mathematical theory of saving*. Economic Journal, 38 (diciembre), 543-559.

Sala-i-Martin, Xavier

2000 *Economic Growth*. Mc Graw Hill, New York.

Urrutia, Carlos.

1996 *Notas sobre crecimiento y ciclos económicos*. Ilades-Georgetown University.

EJERCICIOS PROPUESTOS

En el modelo de crecimiento económico de Ramsey:

a. ¿Qué sucede con el consumo y el capital per-cápita ante un incremento del crecimiento poblacional? Proporcione una explicación gráfica, analítica y matemática a su respuesta.

b. ¿Qué sucede con el consumo y el capital per-cápita ante un incremento de la tasa de depreciación? Proporcione una explicación gráfica, analítica y matemática a su respuesta.

c. Tomando en consideración el modelo con horizonte infinito, analice el comportamiento del ahorro per-cápita a lo largo del tiempo. Si el horizonte es finito, ¿cómo cambiaría su respuesta?

PARTE VII: LA TEORÍA DE LOS CICLOS ECONÓMICOS

LOS CICLOS ECONÓMICOS REALES[6]

Introducción

La evolución del producto no es uniforme a lo largo del tiempo; por el contrario, esta evolución presenta fluctuaciones, en algunos casos bruscas, alrededor de la tendencia de largo plazo.

¿Qué determina estas fluctuaciones? Según la teoría de los ciclos económicos reales estas fluctuaciones provienen básicamente de choques reales que afectan a la economía.

1. Ciclos económicos reales

Según los modelos de ciclos económicos reales, las fluctuaciones son causadas por choques reales. Si bien estos choques son estocásticos (en el sentido de que son completamente aleatorios y no resultan de decisiones de optimización de los agentes económicos), estos agentes conocen información sobre estos choques que les permite hacer predicciones sobre su valor futuro.

El punto de partida es el modelo de crecimiento de Ramsey. Sin embargo, difiere de este modelo pues se asume que existe un choque estocástico que causa las fluctuaciones. Típicamente, este choque estocástico es un choque de productividad (como en el modelo que vamos a ver a continuación). En la medida de que en este modelo el objetivo no es explicar el crecimiento de largo plazo sino las fluctuaciones de corto plazo, es expresado en niveles y no en términos *per cápita*.

El modelo

[6] Este capítulo lo escribió Liu Mendoza. El modelo presentado aquí se basa en Castillo (2008).

El modelo que se presenta a continuación difiere del modelo de Ramsey en tres aspectos.

Primero, la productividad no es determinística, sino que está sujeta a choques estocásticos en cada periodo. Los agentes conocen las propiedades estadísticas de estos choques.

Segundo, la decisión de oferta de trabajo de las familias es endógena, lo que permite que también las familias respondan a los choques de productividad.

Por último, las variables económicas se expresarán en niveles y no en términos por trabajador como en las secciones previas, y asumimos que la población se mantiene constante en cada momento del tiempo.

Se asume que existen dos agentes en esta economía, las familias (consumidores) y las empresas (productores). Estos agentes interactúan en tres mercados competitivos: el mercado de bienes, el mercado financiero y el mercado de trabajo.

El ahorro de las familias se realiza mediante bonos emitidos por las empresas. Cada bono ofrece una rentabilidad de 1 en el periodo siguiente, y su precio es Q_t [7]. Este ahorro es tomado por las empresas bajo la forma de capital, el cual utilizan para producir. Finalmente, las familias ofrecen mano de obra a las empresas a un determinado salario real W_t.

---

[7] Nótese que $Q_t = \frac{1}{1+r_t}$, donde r_t es la tasa de interés que ofrecen los bonos. Ello se desprende de que cuando gasto Q_t unidades monetarias en bonos, este me rinde 1 unidad monetaria en el periodo siguiente; cuando se gasta una unidad monetaria en bonos, este me rinde en el periodo siguiente $(1+r_t)$. Como ambas expresiones reflejan la rentabilidad futura de los bonos, deben ser proporcionales entre sí. Por lo tanto, se obtiene que $\frac{1}{Q_t} = \frac{(1+r_t)}{1}$, que es equivalente a la expresión anterior. Se utiliza Q_t para simplificar los cálculos al momento de log-linealizar el problema.

Las variables de estado son aquellas variables que resumen toda la información pasada y los choques estocásticos. En el modelo, las variables de estado en el periodo t son el capital rezagado un periodo K_{t-1} y la productividad A_t.

El modelo se presentará en tiempo discreto.

El comportamiento de las familias

Las familias tienen que decidir cuánto de sus ingresos destinar a consumo presente y cuanto a consumo futuro y cuántas horas de trabajo ofrecerán en cada periodo. Para ello, las familias maximizan el valor esperado[8] de una función de utilidad intertemporal de infinitos periodos, en la cual deciden cuál es la trayectoria de consumo, oferta de trabajo y demanda de bonos en cada momento del tiempo.

Entonces, en el periodo t cada familia maximiza la siguiente función de utilidad:

$$U_t = E_t\left[\sum_{s=0}^{\infty}\beta^s u\left(C_{t+s}, N_{t+s}\right)\right] \tag{1}$$

Donde U es la función de utilidad intertemporal; u es la función de utilidad instantánea; C es el consumo; N es la cantidad de horas trabajadas que ofrecen las familias; $\beta = \frac{1}{1+\rho}$ es el factor de descuento intertemporal de las familias y ρ es la tasa de descuento intertemporal; finalmente E_t es el operador de esperanza matemática en el periodo t.

Las familias obtienen ingreso de sus salarios, de la rentabilidad de los bonos y de los beneficios generados por las empresas. Si colocamos al lado izquierdo

[8] En la medida de que ahora estamos en un contexto de incertidumbre, las familias maximizan no el valor de su utilidad intertemporal, sino el valor de lo que esperan sea esta utilidad intertemporal.

los gastos y al lado derecho los ingresos, la restricción que enfrenta la familia en cada momento t es:

$$P_t C_t + Q_t B_t = W_t L_t + B_{t-1} + \omega_t \tag{2}$$

Donde B representa el stock de bonos por parte de las familias; W es el salario real; r es la tasa de interés que rinden los bonos; y ω representa el beneficio proveniente de las empresas.

El problema que enfrentan las familias es maximizar el valor esperado de su utilidad intertemporal, sujeto a las restricciones presupuestarias en cada periodo del tiempo:

$$
\begin{aligned}
&Max\ U = E_t\left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u\left(C_{t+s}, N_{t+s}\right)\right] \\
&s.a. \qquad P_t C_t + Q_t B_t = W_t L_t + B_{t-1} + \omega_t \\
&\quad E_t\left[P_{t+1} C_{t+1} + Q_{t+1} B_{t+1}\right] = E_t\left[W_{t+1} L_{t+1} + B_t + \omega_{t+1}\right] \\
&\qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{3}
$$

La resolución del presente problema puede realizarse mediante el método de multiplicadores de Lagrange. La función Lagrangiana toma la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\ell = E_t\left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u\left(C_{t+s}, N_{t+s}\right)\right] &- \lambda_t\left(P_t C_t + Q_t B_t - W_t L_t - B_{t-1} - \omega_t\right) \\
&- \lambda_{t+1} E_t\left(P_{t+1} C_{t+1} + Q_{t+1} B_{t+1} - W_{t+1} L_{t+1} - B_t - \omega_{t+1}\right) \\
&- \ldots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Donde λ_i es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria del periodo i. Las condiciones de primer orden asociadas son:

$$\ell_{C,t} = \ell_{N,t} = \ell_{B,t} = 0 \tag{5}$$

Donde $F_{x,t}$ representa la derivada parcial de la función F respecto de la variable x_t. De este procedimiento, se obtiene:

$$\lambda_t = \frac{\beta^0 U_{C,t}}{P_t} \tag{6}$$

$$\lambda_t = -\frac{\beta^0 U_{N,t}}{W_t} \tag{7}$$

$$\frac{E_t\left[\lambda_{t+1}\right]}{\lambda_t} = Q_t \tag{8}$$

Si iteramos la ecuación (6) un periodo, se obtiene $\lambda_{t+1} = \frac{\beta U_{C,t+1}}{P_{t+1}}$. Reemplazando los valores de λ_t y λ_{t+1} en las ecuaciones (7) y (8), se obtiene:

$$U_{C,t} = -\frac{1}{W_t} U_{N,t} \tag{9}$$

$$Q_t = E_t \beta \left[\frac{U_{C,t+1}}{U_{C,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] \tag{10}$$

La ecuación (9) es la tradicional condición de optimalidad entre empleo y consumo que determina la oferta de trabajo de las familias. Según esta expresión, las familias optimizan cuando el valor del consumo adicional que pueden obtener ofreciendo una unidad adicional de trabajo debe ser igual al valor de la desutilidad que genera ese incremento de las horas trabajadas.

La ecuación (10), denominada Ecuación de Euler, relaciona la decisión de consumo presente y futuro (cuanto consumir y cuanto ahorrar en cada periodo). Según esta ecuación, las familias optimizan cuando la utilidad marginal del consumir en el periodo actual es igual a la utilidad marginal de consumir en el periodo siguiente, ajustada por el factor de descuento subjetivo y la tasa de interés.

Por simplicidad, se asumirá que la siguiente función de utilidad:

$$u(C_t L_t) = \frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{N_t^{1+x}}{1+x} \tag{11}$$

Donde θ representa la aversión al riesgo de las familias y x representa la inversa de la elasticidad oferta de trabajo.

Por lo tanto, la oferta de trabajo y la condición de Euler se convierten en:

$$C_t^{-\theta} = \frac{N_t^x}{W_t} \tag{12}$$

$$Q_t = \beta E_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\theta} \frac{P_t}{P_{t+1}}\right] \tag{13}$$

El comportamiento de las empresas

La empresa tiene una tecnología de producción que está en función del nivel de productividad, el stock de capital del periodo anterior y de la mano de obra que contrata:

$$Y_t = F\left[A_t, K_{t-1}, L_t\right] \tag{14}$$

Donde Y es el nivel de producción, A es el nivel de productividad, K es el capital y L es la mano de obra; las minúsculas representan variables en términos per cápita. Las propiedades de esta función de producción son las mismas que en el modelo de Solow

La función de beneficios de la firma en cada periodo se define como:

$$\omega_t = P_t Y_t - W_t L_t - I_t$$

Y la inversión es igual a:

$$I_t = \left(K_t - K_{t-1}\right) + \delta K_{t-1} \tag{16}$$

Las firmas buscan ahora maximizar los beneficios que obtendrá a lo larga de su existencia, es decir, el valor presente neto en el periodo t de los flujos futuros de beneficios Ω.

Para actualizar valores futuros, un flujo de dinero h_{t+s} que se obtendrá en el periodo $t+s$ vale $\frac{h_{t+s}}{(1+r_t)(1+r_{t+1})...(1+r_{t+s-1})}$ en el periodo t.

Para simplificar la notación, se define el factor de descuento del flujo de beneficios en $t+s$ para convertirlo en términos del periodo t como:

$$d_{t,t+s} = \frac{1}{(1+r_t)(1+r_{t+1})...(1+r_{t+s-1})} = \prod_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{1+r_{t+i-1}}\right) \tag{17}$$

Nótese que $d_{t,t} = 1$, pues dicho valor se encuentra ya en términos del periodo t, y que $d_{t,t+2} = \frac{d_{t,t+1}}{(1+r_{t+1})}$. Finalmente, como $Q_t = \frac{1}{1+r_t}$, se tiene que $Q_t = d_{t,t+1}$.

El valor presente de los flujos de beneficios futuros es entonces:

$$\begin{aligned} \Omega_t &= E_t\left[d_{t,t}\omega_t + d_{t,t+1}\omega_{t+1} + d_{t,t+2}\omega_{t+2} + d_{t,t+3}\omega_{t+3} + ...\right] \\ &= E_t\left[\sum_{s=0}^{\infty} d_{t,t+s}\omega_{t+s}\right] \end{aligned} \tag{18}$$

Reemplazando en la expresión anterior la inversión y la función de producción, obtenemos la siguiente función objetivo para las firmas:

$$\begin{aligned} Max\ \Omega_t &= E_t\left[\sum_{s=0}^{\infty} d_{t,t+s}\left[P_{t+s}Y_{t+s} - W_{t+s}L_{t+s} - \left(K_{t+s} - K_{t+s-1}(1-\delta)\right)\right]\right] \\ &= \quad d_{t,t}\left[P_tY_t - W_tL_t - \left(K_t - K_{t-1}(1-\delta)\right)\right] \\ &\quad + d_{t,t+s}\left[P_{t+1}Y_{t+1} - W_{t+1}L_{t+1} - \left(K_{t+1} - K_t(1-\delta)\right)\right] \\ &\quad + ... \end{aligned} \tag{19}$$

Las condiciones de primer orden:

$$\Omega_{L,t} = \Omega_{K,t} = 0 \tag{20}$$

De las cuales se obtiene:

$$F_{L,t} = \frac{W_t}{P_t} \tag{21}$$

$$1 = \beta E_t\left[d_{t,t+1}\left(P_t F_{K,t} + (1-\delta)\right)\right] \tag{22}$$

(21) es la demanda de trabajo y (22) es la ecuación que determina la inversión

La productividad está sujeta a choques estocásticos, de acuerdo a un proceso proceso AR(1) de la siguiente forma:

$$\ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t \tag{23}$$

Donde $\varepsilon_t \sim iid\left(0,\sigma^2\right)$ es un ruido blanco y $0<\rho<1$. Este último parámetro representa el grado de persistencia del choque de productividad, pues indica cuán rápido un choque ε_t se desvanece en su totalidad. Nótese que $\ln A_{t+1} = \rho \ln A_t + \varepsilon_{t+} = \rho^2 \ln A_{t-1} + \rho\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$. Si continuamos con este procedimiento para A_{t+s},

$$\begin{aligned} \ln A_{t+s} &= \rho^{s+1} \ln A_{t-1} + \left(\rho^s \varepsilon_t + \rho^{s-1}\varepsilon_{t+1} + \ldots + \varepsilon_{t+s}\right) \\ &= \rho^{s+1} \ln A_{t-1} + \sum_{i=0}^{s} \rho^{s-i} \varepsilon_{t+i} \end{aligned} \tag{24}$$

El efecto de un choque ε_t en la productividad futura $\ln A_{t+s}$ es $\frac{\partial \ln A_t}{\partial \varepsilon_t} = \rho^s$.

Como $0<\rho<1$, para un horizonte s muy grande, este efecto tiende a desvanecerse en el tiempo. Entonces, mientras mayor sea ρ, mayor tiempo deberá transcurrir para que los efectos de este choque desaparezcan y mayor será el efecto de un choque ε_t en la productividad futura.

Por último, si reemplazamos $Q_t = d_{t,t+1}$ y asumimos una función de producción Cobb-Douglas:

$$Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{25}$$

Las ecuaciones de demanda de capital y de trabajo se convierten en:

$$1 = \beta E_t \left[Q_t \left(\alpha P_t \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta) \right) \right] \tag{26}$$

$$(1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t} = \frac{W_t}{P_t} \tag{27}$$

Equilibrio competitivo

Un equilibrio competitivo es la secuencia de variables de control (cantidades C_t, B_t, K_t, N_t, I_t y Y_t y precios Q_t y W_t), tales que se cumplan que:

d) Las familias maximicen su función de utilidad intertemporal
e) Las empresas maximicen su función de beneficios
f) En cada periodo, los mercados se encuentren en equilibrio.

Supondremos que los precios son constantes e iguales a la unidad (es decir, $P_t = P_{t+1} = 1$). Entonces, la dinámica de la economía está representada por el siguiente conjunto de ecuaciones:

a) Por el lado de las familias:

$$C_t^{-\theta} = \frac{N_t^{x}}{W_t} \tag{12}$$

$$Q_t = \beta E_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\theta}\right] \quad (13)$$

b) Por el lado de las empresas:

$$I_t = \left(K_t - K_{t-1}\right) + \delta K_{t-1} \quad (16)$$

$$\ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t \quad (23)$$

$$Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \quad (25)$$

$$1 = \beta E_t\left[Q_t\left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1-\delta)\right)\right] \quad (26)$$

$$(1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t} = W_t \quad (27)$$

c) Los equilibrios en los mercados:

$$N_t = L_t \quad (28)$$

$$B_t = K_t \quad (29)$$

$$Y_t = C_t + I_t \quad (30)$$

Tenemos un sistema de 9 ecuaciones que determinan la evolución de las 8 variables endógenas del modelo y el comportamiento de la productividad. Sin embargo, es un sistema de nueve ecuaciones en diferencias no lineales y estocásticas. Estas características generan un sistema dinámico difícil de trabajar y que no tiene una solución analítica. Por lo tanto, se recurre a resolverlo mediante una aproximación log-lineal expresada en términos de desvíos con respecto al estado estacionario.

Ciclos económicos, choques de productividad y persistencia

En esta sección se explica analíticamente cuáles son los mecanismos de transmisión de un choque de productividad mediante los cuales estos choques se difunden y amplifican, generando fluctuaciones de corto plazo en la economía.

Es fundamental distinguir entre choques de productividad transitorios y persistentes[9]. Un choque ε_t es transitorio si sus efectos se disipan rápidamente a medida de que transcurre el tiempo; en el modelo, está representado por un bajo valor de ρ en la ecuación (23). Un choque es persistente si sus efectos se disipan lentamente en el tiempo; matemáticamente es caracterizado por un valor de ρ cercano a 1.

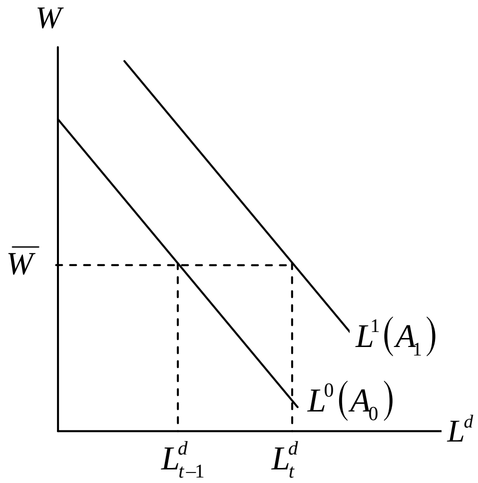
¿Por qué es importante la persistencia de los choques en le dinámica de transición al estado estacionario? Por un lado, es un mecanismo amplificador; mientras mayor sea la persistencia del choque, mayor será la respuesta de la producción y mayores y más prolongadas serán las fluctuaciones económicas. Por otro lado, las variables endógenas del modelo responden de manera distinta ante un choque de productividad transitorio frente a uno persistente.

¿Cuáles son efectos de un choque transitorio y de uno persistente en la economía? ¿En qué se diferencian?

Por el lado de las empresas, un choque de productividad positivo (incremento de ε_t) desplaza la frontera de posibilidades de producción, y, por lo tanto, aumenta la productividad marginal del trabajo y del capital. Ello se traduce en un incremento del nivel de producción y de la demanda de trabajo (ecuación 27).

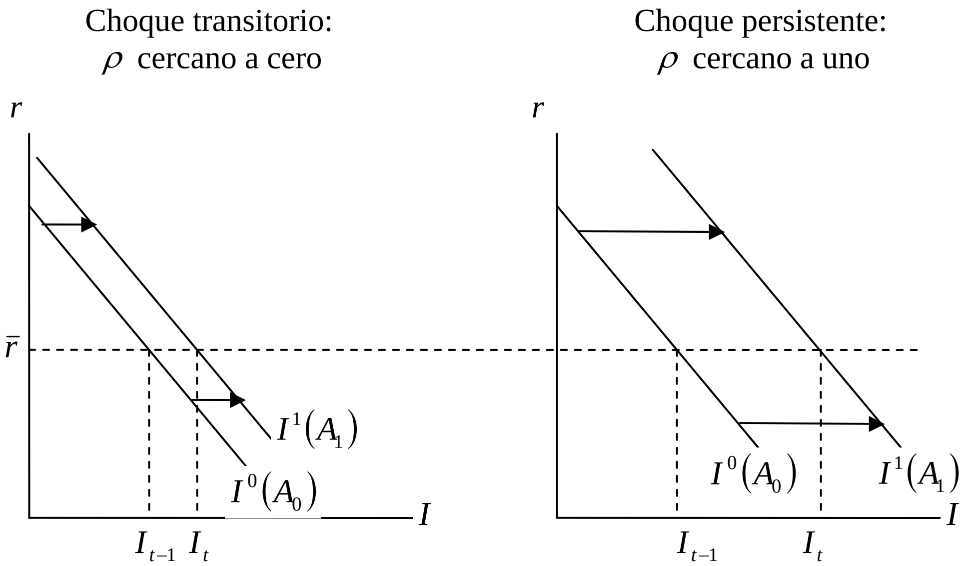
Figura 1

[9] Cuando un choque es persistente, si bien el efecto es duradero, este tiende a disiparse a medida que transcurre el tiempo. En cambio un choque es permanente cuando este no se disipa; es representado con $\rho = 1$.



¿Qué sucede con la demanda de capital de las empresas? La ecuación (26) muestra que la acumulación óptima de capital depende de los flujos esperados de ingresos en el futuro y, por ende, de la productividad marginal futura del capital. Ante un choque transitorio, la productividad futura se elevará, pero solamente por algunos periodos y en menor magnitud que ante un choque persistente. Como consecuencia, para una tasa de interés constante, si bien en ambos casos se eleva la demanda de capital y, por ende, la inversión, este incremento es pequeño cuando el choque es transitorio, pero es grande cuando el choque es persistente.

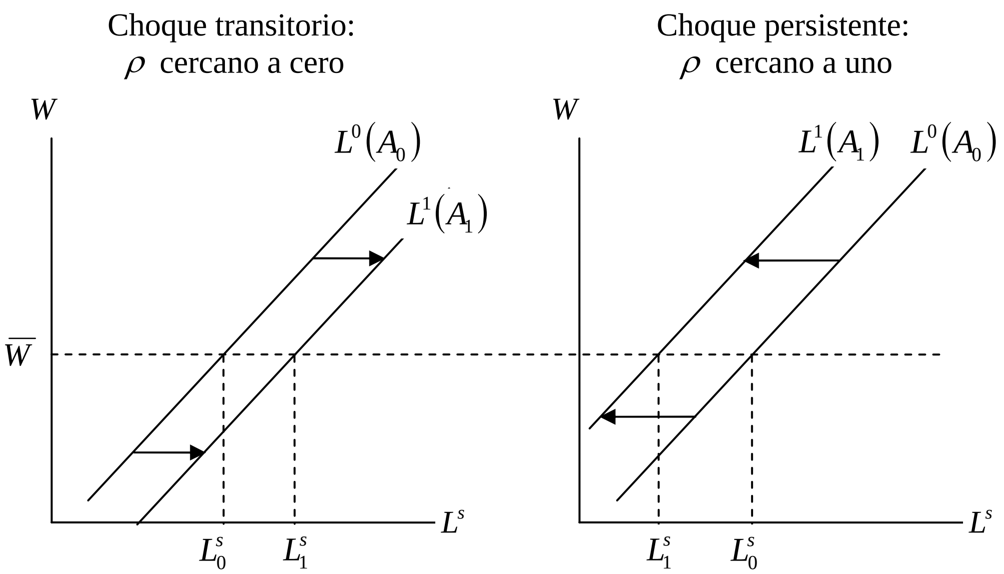
Figura 2



Por el lado de las familias, el incremento de la productividad marginal del trabajo incrementa el salario real y, por lo tanto, la capacidad de gasto de las familias. Por efecto sustitución, el coste de oportunidad de trabajar es mayor y, por lo tanto, se reduce la demanda de ocio y se incrementa la oferta de trabajo; sin embargo, la oferta de trabajo disminuye por el efecto renta, puesto que el incremento del salario real incrementa sus ingresos totales, y ya no necesita ofrecer tanto trabajo como antes para alcanzar el mismo nivel de consumo.

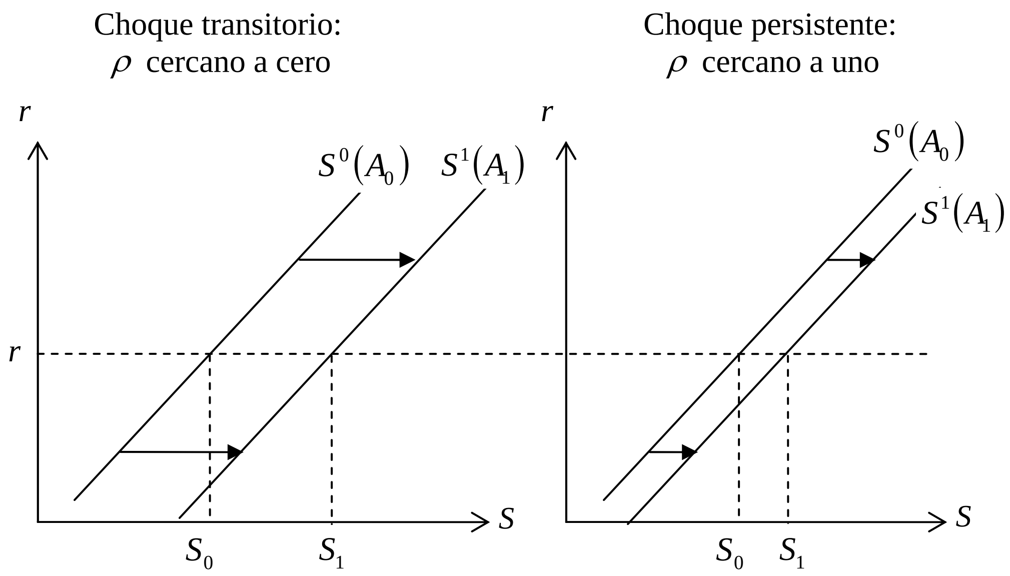
Un choque de productividad transitorio puede interpretarse como un incremento pequeño del valor presente de los ingresos futuros de las familias; por lo tanto, el efecto renta es pequeño y es dominado por el efecto sustitución, y se incrementa la oferta de trabajo. Lo contrario ocurre con un choque persistente: el incremento del valor presente de los flujos de ingreso futuros son grandes; el efecto renta es grande y domina al efecto sustitución, y la oferta de trabajo disminuye.

Figura 3



Desde el punto de vista del consumo, este incremento de los ingresos salariales se traduce en un incremento del consumo. Sin embargo, la hipótesis del ingreso permanente nos dice que la magnitud de este incremento en el consumo depende de si el incremento de los ingresos que lo origina es transitorio o persistente. Si el choque es transitorio, la mayor parte del incremento del ingreso se trasladará a un incremento del ahorro y el incremento del consumo será pequeño. Lo contrario ocurre si el choque es persistente: la mayor parte del incremento del ingreso se traslada a un incremento en el consumo, y un pequeño porcentaje a un incremento del ahorro.

Figura 4

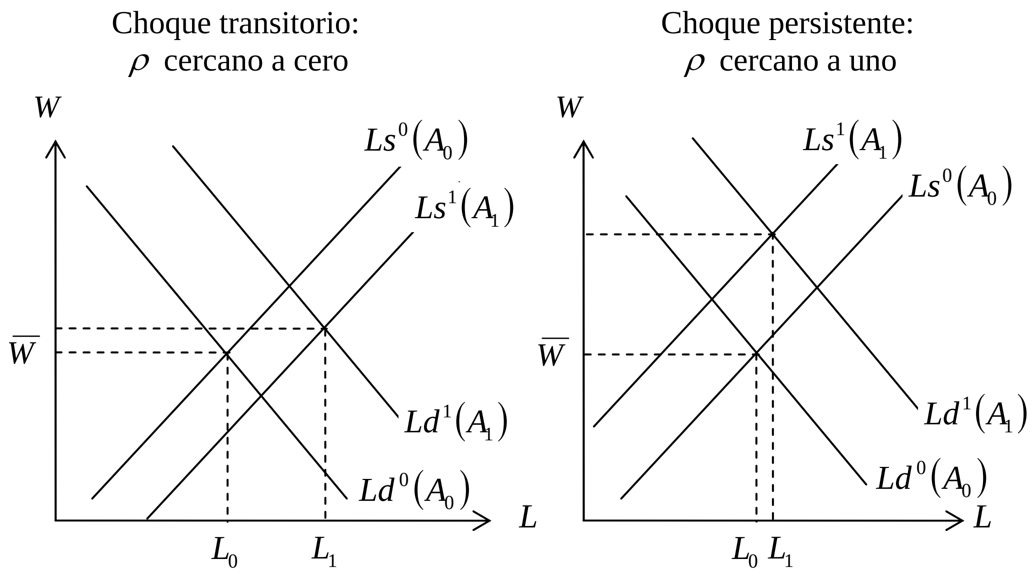


¿Qué ocurre con el equilibrio en cada uno de los mercados?

En el mercado de trabajo, cuando el choque es transitorio la demanda y la oferta de trabajo se incrementan; si asumimos que el incremento de la oferta es menor que el incremento de la demanda[10], el equilibrio en este mercado requiere de un ligero incremento del salario real. Cuando el choque es persistente, la demanda de trabajo aumenta mientras que la oferta de trabajo disminuye[11]; como consecuencia, el salario real se incrementa en una mayor magnitud respecto de cuando el choque es transitorio.

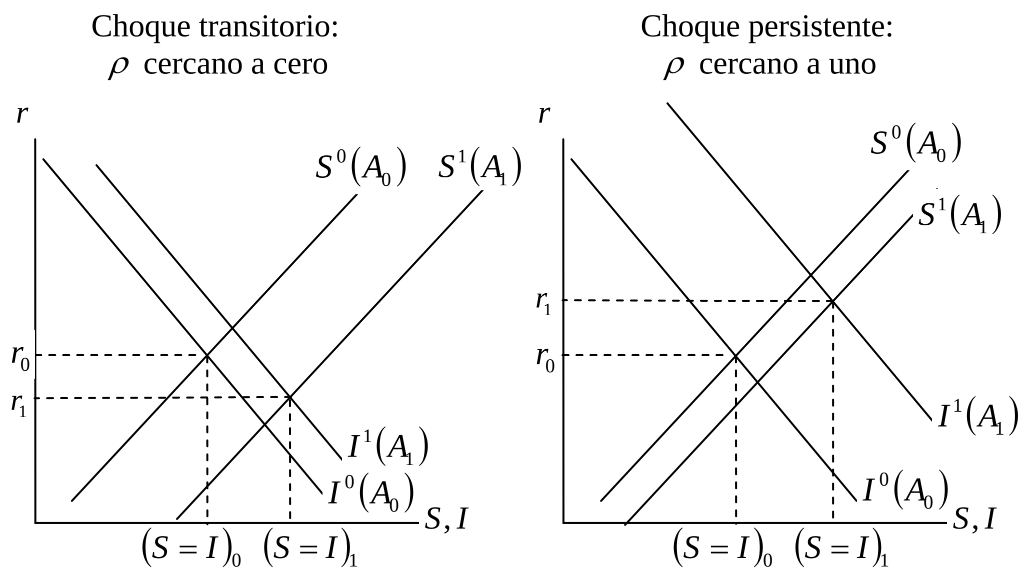
Figura 5

[10] En principio, el salario real quedaría indeterminado. Sin embargo, resultados de calibración efectuados por los autores indica que se incrementa.
[11] En principio, la mano de obra de equilibrio quedaría indeterminado. Sin embargo, resultados de calibración efectuados por los autores indica que se incrementa.



En el mercado financiero, un choque transitorio implica un ligero incremento de la inversión acompañado de un fuerte incremento del ahorro; como consecuencia, la tasa de interés disminuye. Ocurre lo contrario si el choque es persistente: como el ligero incremento del ahorro es acompañado por un fuerte incremento de la inversión, la tasa de interés real aumenta.

Figura 6



En el mercado de bienes, tanto el consumo como la inversión se elevan. Sin embargo, el incremento de estas variables es menor cuando el choque es transitorio con respecto a un choque persistente. Por lo tanto, si bien un choque de productividad eleva la producción, este incremento es mayor si el choque es persistente. Como consecuencia, tanto la magnitud como la duración del ciclo es mayor cuando el choque es persistente.

Bibliografía

Castillo, Paul

2008 Notas de clase del curso Tópicos de Macroeconomía Avanzada. Agosto 2008

EJERCICIOS PROPUESTOS.

En el modelo de ciclos económicos reales:

a. A partir del modelo desarrollado, diga usted si el efecto de un choque de productividad transitorio sobre el tamaño del ciclo económico es mayor o menor cuando las familias son más impacientes. Si el choque es persistente, ¿cambia su respuesta? Proporciones una explicación analítica a su respuesta.

b. Asuma que las preferencias toman la siguiente forma:

$$U(C_t, N_t) = \frac{1}{1-\sigma}\left(C_t(1-N_t)^{v}\right)^{1-\sigma}$$

Halle las condiciones de primer orden de los individuos y defina el equilibrio competitivo.